復刊

作用素代数入門

Hilbert空間よりvon Neumann代数

梅垣壽春・大矢雅則・日合文雄 著

共立出版株式会社

序　　文

本書は，作用素代数入門と題し，作用素代数の導入から Fields 賞に輝く Connes の成果に至るまでの主要な理論を可能な限り含むような計画の下に，理解し易さを常に念頭に置きながら説明を展げた．この内容の書物は，ほとんどが欧米において出版されているが，いずれも，非常に難解な上に内容が多過ぎて理解し難く，作用素代数の核心を捉えるに多大な努力を必要とする．努力なくして一つの分野を理解することは不可能なことではあるが，本書では成る可く分り易くを心掛けながら，徹底的な微に入り細に渡る議論は避け，多くの学生および研究者にこの分野に関心を持って頂けることを念願としながら書き進めた積りである．

作用素代数は OPERATOR ALGEBRAS の日本語読みである．これは作用素環という呼び名で用いられることが多いが，汎く国際的な慣用語となっている ALGEBRA に対応する用語をここでは用いることにしている．C* 代数，von Neumann 代数などの呼称も同様である．

Hilbert 空間論は作用素代数の基盤である．本書においては副題にあるように，前半の初めの部分でこれに力点を置いた．第 1 章，第 2 章が主としてこれに当る．一般に Hilbert 空間の導入は初めの部分は大変スムーズで分り易い．したがってその辺りを入門の手掛かりにすることが好都合であると考え，まず内積の導入から始め直ちに Schwarz の不等式へと進むのであるが，本書の性格上 Banach 空間とその周辺における基本定理群も当然必要とするので，その範囲内でこれらについて説明してある．本書で与えたこれらの項目は函数解析全般を学ぶ上でも必要である．特に第 2 章は種々な特徴を持たせてある．まず Hilbert 空間上の作用素として von Neumann–Schatten 形式 $x\otimes\bar{y}$ を導入し，これを基として各作用素代数 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),\cdots,\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ などについて論じ，単に作用

素代数の研究のみならず，一般の作用素論を学ぶためにも参考となる内容とした．また再生核 Hilbert 空間 RKHS の議論も核函数の関連で説明し，函数解析の類書では稀である項目にも論点をあてた．例えば Gauss 過程，特に Brown 運動の展開定理にも触れ，確率論の重要な部分の一つが函数解析の領域で論じられることを明らかにした．

第 3 章では Gelfand–Naimark の表現定理，GNS 巡回表現など C* 代数の基本定理を中心として論じている．現在では B* 代数という用語は見られなくなったが，一般の Banach 代数の議論に華が咲いた時期があり（1940～50 年代初頭），B* と C* の関係を多くの研究者が論じたが，Gelfand–Naimark と Fukamiya によって B*＝C* と決着が付けられたのである．次に第 4 章でいよいよ von Neumann 代数（v. N. 代数と略記）の議論に入る．ここでは $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の種々な位相構造，稠密定理，テンソル積，v. N. 代数の型など最も基本的な事項を網羅する．これまでが基礎的な部分で，次章より von Neumann 以後の作用素代数の理論に突入することになる．

第 5 章では所謂 KMS 条件およびそれと関連した Tomita–Takesaki 理論を記述する．また von Neumann の接合積の手法は Nakamura–Takeda が 1950 年代後半に本格的に v. N. 代数上で論じたが，その延長上の Takesaki の双対定理を証明する．第 6 章では，Dye–Segal の非可換積分論をベースにして 1950 年代に Umegaki が非可換系における条件付期待値，マルチンゲール，十分統計などの概念を導入して非可換確率論を提唱したが，それ以後に進展した様々な Radon–Nikodym 型定理，Connes コサイクル，完全正写像などの関連のもとで議論が展開される．最後の第 7 章では，Ⅲ型 v. N. 代数の理論のうち，特に Connes によるⅢ型 v. N. 代数の分類理論を紹介する．さらにⅢ型 v. N. 代数の構造理論についても簡単に触れる．なお，v. N. 代数の重要な例を本書の最後の付録で与える．

以上が本書の内容の概観であり，冒頭で述べたように Hilbert 空間論より作用素代数の最近の成果に至る理論が網羅されている．そこで本書を能率よく読む仕方についてであるが，本書は大別してⅠ（第 1, 2 章），Ⅱ（第 3, 4 章），Ⅲ（第 5, 6, 7 章）と三つの部分に分けられる．Ⅰは数学科学部 3, 4 年のレベルで学習することが可能である．このうち第 2 章の後半を終えて確率論とか，ある

いは Fourier 解析の方向に進み，またさらに応用数学の分野で信号解析などに向かうことも能率的方法である．(勿論この場合もⅡとⅢの前半は活用可能である)．Ⅱ，Ⅲは数学関連専攻の大学院レベルを対象とする内容であり，特にⅢはかなり専門的な展開がなされている．

本書の内容と密接な関係にある著者等の既刊「確率論的エントロピー」(文献［10］)と「量子論的エントロピー」(文献［29］)なども本書と平行して参考にして頂ければ能率は一層あがると期待される．特に物理学や情報理論などの応用面に興味を持たれる方は尚一層好都合である．例えば，第 1, 2 章に続いて［10］の第 6 章と［29］の第 7 章の前半を；第 5 章に続いて［29］の第 7 章の後半；第 3, 4, 6 章に続いて［29］の第 8, 9, 10, 11 章というふうに本書の応用面が平行して展開される．文献［10］,［29］の各章の表題は本書の最後に付記してある．

本書の出版によって難解な作用素代数の理論が数学の分野で大いに関心を持たれ，これが数学とその応用の領域の発展に寄与する事を心から願うものである．

終りに，本書執筆の切っ掛けとなった，上述の「確率論的・量子論的エントロピー」2 巻の出版以来，著者等と絶え間無い接触を続け，著者等の無理な意見もよく理解し，さらに面倒な校正の手助けなどもして下さった共立出版(株)の佐藤邦久，平山靖夫両氏に心からお礼を申し上げたい．

昭和 59 年　晩秋之候

著　　者

目　　次

第1章　函数解析の基礎概念

第2章　$\boldsymbol{B}(\mathscr{H}), \boldsymbol{C}(\mathscr{H}), \boldsymbol{S}(\mathscr{H}), \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ と RKHS

第3章　C*　代　数

第4章　von Neumann 代数

第5章　KMS 条件と Tomita-Takesaki 理論

第6章　非可換確率論

第7章　Connes の III 型理論

付録　II 型，III 型 v.N. 代数の例

凡例（本書を読むために）

記号“≡”は左を右で定めることを意味し，“$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$”は左を右で定義することを意味する．

“$A \Longleftrightarrow B$”は A と B は同値（同等）であると読み，“$A \Longrightarrow B$”は A ならば B であると読む．

第1章　函数解析の基礎概念

この章では，本書を読むための準備として，まずHilbert空間に関する必要な事項を説明し，種々な基本定理を証明をつけて述べる．作用素のスペクトル解析についての基本定理群はそれぞれ命題として説明してあるが，個々の証明については概ね省略した．これらについては他書を参照されたい．また，一般の線形位相空間，Banach空間，具体的な函数空間などに関する基本的結果についても記号とともに説明を与える．さらに，本書の議論の対象である様々な代数を定義し，スペクトルとリゾルベントについて触れる．最後に，位相群についても概説する．

1.1　Hilbert空間の基本概念

数体 $\boldsymbol{K}$（実数体 $\boldsymbol{R}$ または複素数体 $\boldsymbol{C}$――これをスカラー体ともいう）上の線形空間 X の任意の元 x, y に対して以下の3つの条件を満たす数 $\langle x, y\rangle \in \boldsymbol{K}$（スカラー値）が定まるとき，$\langle x, y\rangle$ を x と y の**内積**といい，内積をもつ線形空間を**内積空間**という：任意の $x, y, z \in X$，$\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対して，（i）$\langle x, x\rangle \geqq 0$，$=0 \Longleftrightarrow x=0$；（ii）$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$；（iii）$\langle x, \lambda y+z\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$．$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ とおく．次の不等式は，種々な不等式の中で最も重要なものである．

〈定理1.1〉　Schwarzの不等式： 内積空間 X において，$|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\cdot\|y\|$ $(\forall x, y \in X)$ が成立する．ここで等号の成立は，x と y が線形従属のときである．

証明　$x=0$ のとき，不等式の両辺$=0$で明らか．$x \neq 0$ とする．$x' = x/\|x\|$ とおくと，

$$0 \leqq \|\langle x', y\rangle x' - y\|^2 = |\langle x', y\rangle|^2 - 2|\langle x', y\rangle|^2 + \|y\|^2.$$

ゆえに $|\langle x', y\rangle|^2 \leqq \|y\|^2$．したがって $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\|\cdot\|y\|$ を得る．この計算式から，定理の不等式が等号ならば，$y = \langle x', y\rangle x' = (\langle x', y\rangle/\|x\|)x$．逆に $y = \lambda x$ ならば，$|\langle x, y\rangle| = |\lambda|\cdot\|x\|^2 = \|x\|\cdot\|y\|$．∎

この不等式より，$\|\cdot\|$ が X 上の**ノルム**を定めることは容易に示せる：すな

わち，任意の $x, y \in X$，$\lambda \in \boldsymbol{K}$ に対して，（i）$\|x\| \geqq 0$，$=0 \Longleftrightarrow x=0$；（ii）$\|\lambda x\|=|\lambda| \cdot \|x\|$；（iii）$\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$.

一般にノルム $\|\cdot\|$ をもつ線形空間を**ノルム空間**という．ノルム空間 X において，点列 $\{x_n\} \subset X$ が $\|x_m-x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ のとき，$\{x_n\}$ を Cauchy 列という．Cauchy 列 $\{x_n\}$ が常に収束するとき，すなわち $x \in X$ が存在して $\|x_n-x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき，X は**完備**であるという．完備ノルム空間を **Banach 空間**という．

内積空間 X がノルム $\|x\|=\langle x, x\rangle^{1/2}$ に関して完備であるとき，X を（$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ なら実，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ なら複素）**Hilbert 空間**という．以下，Hilbert 空間を $\mathscr{H}$ で表す．

内積空間 X および Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ における有用な性質を次に述べよう．

1°　中線定理：$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$，$\forall x, y \in X$.

2°　ノルム空間 X が 1° を満たすとき，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|ix+y\|^2-i\|ix-y\|^2) \quad \text{（偏極化）}$$

によって，X 上に内積 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ が導入される．逆に，内積空間 X は常にこの等式を満たす．特に X が Banach 空間で 1° を満たすとき，X は Hilbert 空間になる．

ここで，Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の最も簡単な例として，

$$\mathscr{H}=\boldsymbol{R}^n, \langle x, y\rangle=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,;\; \mathscr{H}=\boldsymbol{C}^n, \langle x, y\rangle=\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k y_k$$

が挙げられる．これらは有限次元の場合であるが，無限次元の例は 1.6 節で与える．

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の元の族 $\{x_j\,;\, j \in J\} \subset \mathscr{H}$ に対して，$x=\sum_{j \in J} x_j$ とは，任意の $\varepsilon>0$ に対して有限集合 $J_0 \subset J$ が存在して $\|x-\sum_{j \in K} x_j\|<\varepsilon$（$J_0 \subset \forall K \subset J, K$ は有限集合）のときをいう．$\sum_{j \in J} x_j$ は存在すれば一意である．これを $\{x_j\}$ の**和**という．

次に，直交系の話に移ろう．元 $x, y \in \mathscr{H}$ が $\langle x, y\rangle=0$ のとき，x と y は**直交する**といい，$x \perp y$ で表す．$x \perp y \Longleftrightarrow y \perp x$ である．$\langle x_i, x_j\rangle=0$ $(i \neq j)$ となる族 $\{x_j\} \subset \mathscr{H}$ を**直交系**といい，さらに $\|x_j\|=1$ $(\forall j)$ のとき，$\{x_j\}$ を**正規直交系**（orthonormal system；ONS と書く）という．$\langle x_j, x\rangle=0$ $(\forall j)$ ならば常

に $x=0$ のとき，$\{x_j\}$ を**完全**（complete）といい，完全正規直交系を CONS と書く．以下，Hilbert 空間における直交性と CONS に関する有用な結果を述べよう．

〈定理 1.2〉 Gram-Schmidt の直交化法：$\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ を線形独立な元の列とする．これに対して

$$e_1=x_1/\|x_1\|,$$

$$e_n=y_n/\|y_n\|,\quad y_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}\langle e_k, x_n\rangle e_k,\quad n=2,3,\cdots$$

とおくと，$\{e_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ は ONS である．

証明 数学的帰納法によって行う．$\|e_1\|=1$ は明らか．$\{e_1,\cdots,e_n\}$ が ONS であるとする．このとき，e_{n+1} を加えた $\{e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$ も ONS であることは，$\|e_{n+1}\|=1$ と

$$\langle e_k, e_{n+1}\rangle=\frac{1}{\|y_{n+1}\|}\{\langle e_k, x_{n+1}\rangle-\langle e_k,\langle e_k, x_{n+1}\rangle e_k\rangle\}=0,\quad k\leqq n$$

よりわかる．▌

Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ において線形独立な元の集合はいくらでもとれる．これに対して上述の直交化法を適用すれば，ONS はいくらでも構成できる．CONS の構成については問題としておく．

問 （1） 任意の Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ において CONS が存在することを Zorn の補題を用いて証明せよ．

（2） 『$\mathscr{H}$ が可分 $\Longleftrightarrow$ CONS が高々可算』を示せ．

3° （1） **Pythagorean**：$x\perp y\Rightarrow\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

（2） 有限な ONS $\{x_k\}_{k=1}^n$ に対して，

$$\|x\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^n\langle x_k, x\rangle x_k\right\|^2+\sum_{k=1}^n|\langle x_k, x\rangle|^2.$$

証明 （2）：$\sum=\sum_{k=1}^n$ と書くと，

$$\begin{aligned}\|x-\textstyle\sum\langle x_k, x\rangle x_k\|^2&=\|x\|^2+\textstyle\sum\|\langle x_k, x\rangle x_k\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle\textstyle\sum\langle x_k, x\rangle x_k, x\rangle\\&=\|x\|^2+\textstyle\sum|\langle x_k, x\rangle|^2-2\,\mathrm{Re}\textstyle\sum|\langle x_k, x\rangle|^2\\&=\|x\|^2-\textstyle\sum\langle x_k, x\rangle|^2.\end{aligned}$$ ▌

4° Bessel の不等式：ONS $\{x_n\}$ に対し，$\sum_n|\langle x_n, x\rangle|^2\leqq\|x\|^2$.（これは 3° の（2）より明らか．）

〈定理 1.3〉 展開定理：ONS$\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ に対して，次は同値である．

（1） $\{x_n\}$ が CONS (i.e., $\langle x_n, x\rangle=0,\ \forall n\in\boldsymbol{N}\Rightarrow x=0$)．

（2） **Fourier 展開**：$x=\sum_n\langle x_n, x\rangle x_n,\quad \forall x\in\mathcal{H}$．（ここで $\langle x_n, x\rangle$ を x の **Fourier 係数**，右辺を **Fourier 級数**，この等式を CONS $\{x_n\}$ による x の **Fourier 展開**という．）

（3） **Riesz-Fischer の等式**：$\|x\|^2=\sum_n|\langle x_n, x\rangle|^2,\quad \forall x\in\mathcal{H}$．

（4） **Parseval の等式**：$\langle x, y\rangle=\sum_n\langle x, x_n\rangle\langle x_n, y\rangle,\quad \forall x, y\in\mathcal{H}$．

証明 （1）⇒（2）：$y_n=\sum_{k=1}^n\langle x_k, x\rangle x_k$ とおくと，Bessel の不等式から $\|y_m-y_n\|^2=\sum_{k=n+1}^m|\langle x_k, x\rangle|^2\to 0$ $(m>n\to\infty)$．ゆえに $y=\lim_n y_n=\sum_k\langle x_k, x\rangle x_k$ が存在する．また各 n に対して，$\langle x_n, y\rangle=\sum_k\langle x_k, x\rangle\langle x_n, x_k\rangle=\langle x_n, x\rangle$，すなわち $\langle x_n, x-y\rangle=0$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．ゆえに $x=y$．

（2）⇒（3）：$\mathcal{H}$ のノルム収束の意味で $x=\lim_n\sum_{k=1}^n\langle x_k, x\rangle x_k$．ゆえに $\|x\|^2=\lim_n\sum_{k=1}^n|\langle x_k, x\rangle|^2=\sum_n|\langle x_n, x\rangle|^2$．（2）⇒（4）も同様であり，（4）⇒（3）⇒（1）は明らかである．▌

この展開定理は ONS $\{x_n\}$ が可算な場合で議論した．つまり $\mathcal{H}$ が可分な場合の命題である．一般の場合も同様である．

問 一般の Hilbert 空間において，上述の展開定理を明記し，それを証明せよ．

1.2 Hilbert 空間における基本定理

前節では，基本的不等式，直交性を中心とし，直交系の議論に及んだ．この節では，それをさらに進展させ，部分空間の間の直交性を議論し，それを用いて重要な基本定理を証明しよう．

$\mathcal{H}$ の線形部分空間を単に**部分空間**といい，$\mathcal{H}$ のノルム $\|\cdot\|$ で閉じている部分空間を**閉部分空間**という．いま，$\mathcal{K}$ を $\mathcal{H}$ の任意の部分集合とすると，$\mathcal{K}^\perp\equiv\{x\in\mathcal{H}\ ;\ \langle x, y\rangle=0, \forall y\in\mathcal{K}\}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間となり，これを $\mathcal{K}$ の**直交補空間**という．$\mathcal{H}$ の2つの閉部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ において，$\langle x, y\rangle=0$ $(\forall x\in\mathcal{K}, \forall y\in\mathcal{L})$ であるとき，$\mathcal{K}$ と $\mathcal{L}$ は互いに**直交する**といい，$\mathcal{K}\perp\mathcal{L}$ で表す．$\mathcal{K}\perp\mathcal{L}\Longleftrightarrow\mathcal{L}\perp\mathcal{K}$ である．このとき，直和 $\mathcal{K}\oplus\mathcal{L}\equiv\{x+y\ ;\ x\in\mathcal{K}, y\in\mathcal{L}\}$

も $\mathcal{H}$ の閉部分空間となる.

〈**定理 1.4**〉 **最短距離定理**：$\mathcal{K}$ が閉部分空間であるとき，$x\in\mathcal{H}$ に対して $d=\mathrm{dist}(x,\mathcal{K})\equiv\inf\{\|x-y\|\,;\,y\in\mathcal{K}\}$ とおくと，$z\in\mathcal{K}$ が一意に存在して $d=\|x-z\|$ となる.（このとき，$x\mapsto z$ を $z=P_{\mathcal{K}}x$ とおき，$P_{\mathcal{K}}$ を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**射影作用素**という.）

証明 点列 $\{y_n\}\subset\mathcal{K}$ が存在して $\|y_n-x\|\to d$. したがって

$$
\begin{aligned}
\|y_m-y_n\|^2&=\|(y_m-x)-(y_n-x)\|^2\\
&=2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-\|y_m+y_n-2x\|^2 \quad (1.1\text{ 節 }1^\circ\text{ より})\\
&=2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4\left\|\frac{1}{2}(y_m+y_n)-x\right\|^2\\
&\leqq 2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4d^2\\
&\to 2d^2+2d^2-4d^2=0 \quad (m,n\to\infty).
\end{aligned}
$$

ゆえに $\{y_n\}$ は Cauchy 列. $\mathcal{H}$ は完備だから $z\in\mathcal{H}$ が存在して $\|y_n-z\|\to 0$. また，$\mathcal{K}$ は閉であるから $z\in\mathcal{K}$. さらに $d\leqq\|x-z\|=\lim_n\|x-y_n\|=d$, すなわち $\|x-z\|=d$. 一意性は，もし $z'\in\mathcal{K}$ が $\|x-z'\|=d$ ならば $\|z-z'\|^2=\|(z-x)-(z'-x)\|^2=2\|z-x\|^2+2\|z'-x\|^2-4\left\|\frac{1}{2}(z+z')-x\right\|^2\leqq 0$ となることからわかる. ▌

部分集合 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ が**凸集合**であるとは，任意の $x,y\in\mathcal{K}$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ に対して $\lambda x+(1-\lambda)y\in\mathcal{K}$ のときをいう.

1° 閉凸集合 $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}$ に対しても，〈定理 1.4〉は成立する.（その証明も上と同様である.）

〈**定理 1.5**〉 **射影定理**：$\mathcal{K}$ が $\mathcal{H}$ の閉部分空間であるとき，次が成立する：（1） $x-P_{\mathcal{K}}x\in\mathcal{K}^{\perp}$；（2） 各 $x\in\mathcal{H}$ は一意に $x=y+z$ $(y\in\mathcal{K}, z\in\mathcal{K}^{\perp})$ と表され，$y=P_{\mathcal{K}}x, z=P_{\mathcal{K}^{\perp}}x$；（3） $\mathcal{H}=\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}^{\perp}$.

証明 （1）：$z=x-P_{\mathcal{K}}x$ とおく. 任意の $t\in\boldsymbol{R}$ と $y\in\mathcal{K}$ に対して，〈定理 1.4〉の $d\geqq 0$ を用いると，$P_{\mathcal{K}}x+ty\in\mathcal{K}$ より $d^2\leqq\|x-(P_{\mathcal{K}}x+ty)\|^2=\|z-ty\|^2=\|z\|^2-2t\mathrm{Re}\langle z,y\rangle+t^2\|y\|^2$. $\|z\|=d$ より $t^2\|y\|^2-2t\mathrm{Re}\langle z,y\rangle\geqq 0$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$. ゆえに $\mathrm{Re}\langle z,y\rangle=0$. この計算で t を it で置き換えると，$\mathrm{Im}\langle z,y\rangle=0$. したがって $z\perp y$.（2），（3）は（1）と Pythagorean より明らか. ▌

この定理の系として，次の 2°〜4° がすぐいえる.

2° $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{K}$ に対して，$\mathcal{K}^{\perp\perp}=(\mathcal{K}^{\perp})^{\perp}$ は $\mathcal{K}$ を含む最小の閉部分空間である.

3° ONS $\mathcal{K}=\{x_j\}$ が完全（CONS）$\Longleftrightarrow \mathcal{K}^{\perp}=\{0\} \Longleftrightarrow \mathcal{K}^{\perp\perp}=\mathcal{H}$.

4° $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ に対して，射影作用素 $P_{\mathcal{K}}$ は線形かつベキ等（i.e., $P_{\mathcal{K}}(\lambda x+\mu y)=\lambda P_{\mathcal{K}}x+\mu P_{\mathcal{K}}y$，$P_{\mathcal{K}}{}^2=P_{\mathcal{K}}$）.

$\mathcal{H}$ 上で定義され $\boldsymbol{K}$ に値をとる函数 f が $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$（$\forall x, y \in\mathcal{H}, \forall \lambda, \mu\in\boldsymbol{K}$）のとき，$f$ を $\mathcal{H}$ 上の線形汎函数という.

5° $\mathcal{H}$ 上の線形汎函数 f に対して，次は同値である：（1）$M>0$ が存在して $|f(x)|\leqq M\|x\|$（$\forall x\in\mathcal{H}$）;（2）f は零元 $0\in\mathcal{H}$ で連続；（3）f はある $x\in\mathcal{H}$ で連続；（4）f はすべての $x\in\mathcal{H}$ で連続.

この命題の条件を満たすとき，f は**有界**であるという．$\mathcal{H}$ 上の有界線形汎函数の全体を $\mathcal{H}^*$ で表す.

6° 任意の $f\in\mathcal{H}^*$ に対して，次が成立する：

$$\sup_{\|x\|\leqq 1}|f(x)|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{x\neq 0}|f(x)|/\|x\|$$
$$=\inf\{M>0\,;\,|f(x)|\leqq M\|x\|, \forall x\in\mathcal{H}\}\quad (\equiv\|f\| \text{ とおく}).$$

この $\|f\|$ を f の**ノルム**という．これにより $\mathcal{H}^*$ はノルム空間になる．内積により定義される線形汎函数については,

7° 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，$f_x(y)=\langle x, y\rangle$（$y\in\mathcal{H}$）とおくと，$f_x\in\mathcal{H}^*$ であり $\|f_x\|=\|x\|$.

これは Schwarz の不等式と $f_x(x)=\|x\|^2$ からいえる．これの逆である次の定理は特に重要である.

〈定理 1.6〉 Riesz の定理：各 $f\in\mathcal{H}^*$ に対して，$x_f\in\mathcal{H}$ が一意に存在して $f(y)=\langle x_f, y\rangle$（$\forall y\in\mathcal{H}$）.

証明 $f=0$ ならば $x_f=0$ とすればよい．$f\neq 0$ とする．f の核(零空間ともいう) $\ker f\equiv\{y\in\mathcal{H}\,;\,f(y)=0\}$ は閉部分空間であり $\ker f\neq\mathcal{H}$．〈定理 1.5〉より，$z\in(\ker f)^{\perp}$ が存在して $f(z)\neq 0$．任意の $y\in\mathcal{H}$ に対して $y-(f(y)/f(z))z\in\ker f$ となるから，$\langle z, y-(f(y)/f(z))z\rangle=0$．よって $f(y)=\langle z, y\rangle f(z)/\|z\|^2=\langle(\overline{f(z)}/\|z\|^2)z, y\rangle$．ゆえに $x_f=(\overline{f(z)}/\|z\|^2)z$ とおけばよい．一意性は，もし $f(y)=\langle x, y\rangle$（$\forall y\in\mathcal{H}$）ならば $\langle x-x_f, y\rangle=0$（$\forall y\in\mathcal{H}$）となることからわかる．▌

註 対応 $x\in\mathcal{H}\longmapsto f_x\in\mathcal{H}^*$ は共役線形な等距離写像であり，$\mathcal{H}$ が実 Hilbert 空間ならば $\mathcal{H}\cong\mathcal{H}^*$ である．$x=f_x$ と同一視することにより，$\mathcal{H}=\mathcal{H}^*$ と考えてよい.

問 命題 2°～7° を証明せよ.

この節の最後に, 2つの Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ の直和とテンソル積について論じよう. $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}\equiv\{x\oplus y\,;\,x\in\mathscr{H},y\in\mathscr{K}\}$ は

$$x_1\oplus y_1+x_2\oplus y_2=(x_1+x_2)\oplus(y_1+y_2),\quad \lambda(x\oplus y)=\lambda x\oplus\lambda y$$

によって線形空間となる. また,

$$\langle x_1\oplus y_1, x_2\oplus y_2\rangle=\langle x_1, x_2\rangle+\langle y_1, y_2\rangle$$

は内積の条件を満たし, これにより $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ は Hilbert 空間になる. これを $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ の**直和** Hilbert 空間という. ここで $x=x\oplus 0$ $(x\in\mathscr{H})$, $y=0\oplus y$ $(y\in\mathscr{K})$ と同一視すると, $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ は $\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ の閉部分空間となり, $\mathscr{H}^{\perp}=\mathscr{K}$, $\mathscr{K}^{\perp}=\mathscr{H}$ の関係にある. 無限個の Hilbert 空間の直和 Hilbert 空間も, 同様な仕方で定義される.

各 $x\in\mathscr{H}$, $y\in\mathscr{K}$ に対して, 直積空間 $\mathscr{H}\times\mathscr{K}=\{(u,v)\,;\,u\in\mathscr{H}, v\in\mathscr{K}\}$ 上の共役双線形な汎函数 $x\otimes y$ を $x\otimes y(u,v)=\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle$ で定める. このような共役双線形な汎函数の有限個の線形結合全体のなす線形空間を $\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ で表す. $f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes y_i$, $g=\sum_{j=1}^{m}\mu_j u_j\otimes v_j\in\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ に対して,

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_i\mu_j\langle x_i,u_j\rangle\langle y_i,v_j\rangle$$

と定めると,

8° この $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ 上の内積である.

証明 まず, $\langle f,g\rangle$ が f,g の表し方に無関係に定まることは, $f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes y_i=0$ のとき, 任意の $g=\sum_{j=1}^{m}\mu_j u_j\otimes v_j\in\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ に対して,

$$\langle f,g\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_i\mu_j\overline{x_i\otimes y_i(u_j,v_j)}=\sum_{j=1}^{m}\mu_j\overline{f(u_j,v_j)}=0$$

となることからわかる. $(x,y)\in\mathscr{H}\times\mathscr{K}\longmapsto x\otimes y\in\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ が双線形写像だから, 任意の $f\in\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ は Gram–Schmidt の直交化法により ONS$\{y_i\}_{i=1}^{n}$ を用いて $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$ と表せる. このとき,

$$\langle f,f\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\langle x_i,x_j\rangle\langle y_i,y_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\geqq 0$$

となり, $\langle f,f\rangle=0$ は $f=0$ のときに限り成立する. 内積の他の条件は明らかである. ▌

$\mathscr{H}\odot\mathscr{K}$ をこの内積で完備化した Hilbert 空間を $\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ の**テンソル積** Hi-

lbert 空間といい，$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ で表す．

問 $\{x_j\,;\,j\in J\}$，$\{y_k\,;\,k\in K\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}$，$\mathcal{K}$ の CONS とすると，$\{x_j\otimes y_k\,;\,j\in J, k\in K\}$ が $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ の CONS になることを示せ．

1.3 Hilbert 空間上の作用素

以下，Hilbert 空間は，特に断らない限り複素 Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$，$\mathcal{K}$ を Hilbert 空間とし，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{H}$ の部分空間とする．$\mathcal{D}$ 上で定義され $\mathcal{K}$ に値をとる写像 A が

$$A(\lambda x+\mu y)=\lambda Ax+\mu Ay, \quad \forall x, y\in\mathcal{D}, \forall\lambda, \mu\in\boldsymbol{C}$$

を満たすとき，A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**線形作用素**または単に**作用素**という．$\mathcal{D}$ を A の**定義域**といい，$\mathrm{dom}\,A$ で表す．また，集合 $\{Ax\,;\,x\in\mathcal{D}\}$ を A の**値域**といい，$\mathrm{ran}\,A$ で表す．

I. 有界作用素

上述の A で，$\mathrm{dom}\,A=\mathcal{H}$ かつ定数 $M>0$ が存在して $\|Ax\|\leqq M\|x\|$ $(\forall x\in\mathcal{H})$ であるとき，A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**有界作用素**という．このような A の全体を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ で表す．$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ における線形演算を

$$(\lambda A+\mu B)x=\lambda Ax+\mu Bx, \quad x\in\mathcal{H}, \ A, B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \ \lambda, \mu\in\boldsymbol{C}$$

で定義し，$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ のノルムを

$$\|A\|\equiv\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=\inf\{M>0\,;\,\|Ax\|\leqq M\|x\|, \forall x\in\mathcal{H}\}$$

で定めることによって，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ は Banach 空間になる．

1° $F:\mathcal{H}\times\mathcal{K}\to\boldsymbol{C}$ が**双線形汎函数**（i.e., $F(x,y)$ が x について共役線形，y について線形）であり，有界（i.e., $M>0$ が存在して $|F(x,y)|\leqq M\|x\|\|y\|$, $\forall x\in\mathcal{H}, \forall y\in\mathcal{K}$）であるとき，$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ と $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が一意に存在して，$F(x,y)=\langle x, Ay\rangle=\langle Bx, y\rangle$ $(\forall x\in\mathcal{H}, \forall y\in\mathcal{K})$．

証明 $x\in\mathcal{H}$ を固定して $f(y)=F(x,y)$ とおくと，$f\in\mathcal{K}^*$．〈定理 1.6〉より，$x'\in\mathcal{K}$ が一意に存在して $f(y)=\langle x', y\rangle$ $(\forall y\in\mathcal{K})$．$x'=Bx$ とおくと，$B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ が容易にわかる．$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ の存在も同様であり，一意性も明らか．▌

以下，$\mathcal{H}=\mathcal{K}$ とし，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\equiv\boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ と記す．

2° 作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，作用素 $A^*\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が一意に存在して

$\langle x, Ay\rangle=\langle A^*x, y\rangle$ （$\forall x, y\in\mathcal{H}$）.

証明 $F(x, y)=\langle x, Ay\rangle$ とおけば，1° の条件を満たすから，$B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が一意に存在して $F(x, y)=\langle Bx, y\rangle$. この B が求める A^* である. ▌

この A^* を A の**共役作用素**という．特に $A=A^*$ のとき，A を**自己共役**という．$\langle x, Ax\rangle\geqq 0$ （$\forall x\in\mathcal{H}$） のとき，A を**正作用素**という．正作用素は自己共役である．

次の作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ は重要である：（1） A が**正規作用素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A^*A=AA^*$；（2） A が**射影作用素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A=A^*=A^2$；（3） A が**等距離作用素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\|Ax\|=\|x\|(\forall x\in\mathcal{H})$；（4） A が**ユニタリー作用素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A^*A=AA^*=I$ （I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素）；（5） A が**半等距離作用素** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A が $(\ker A)^\perp$ 上で等距離作用素（ただし $\ker A\equiv\{x\in\mathcal{H}\ ;\ Ax=0\}$）.

3° $\|A^*\|=\|A\|=\|A^*A\|^{1/2}$ （$\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$）.

4° $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が半等距離作用素であることと A^*A が射影作用素であることは同値である．このとき $\mathcal{L}=(\ker A)^\perp$，$\mathcal{K}=\operatorname{ran} A$ とおくと，$A^*A=P_{\mathcal{L}}$，$AA^*=P_{\mathcal{K}}$ の関係にある．$\mathcal{L}$，$\mathcal{K}$ をそれぞれ A の**初期空間**，**終空間**という．この A に対して，A^* は初期空間 $\mathcal{K}$，終空間 $\mathcal{L}$ の半等距離作用素になる．

特に E が射影作用素のとき，$\operatorname{ran} E=\ker(I-E)$ となり，$E=P_{\operatorname{ran}E}$ である．また，$E^\perp\equiv I-E$ とおくと，$E^\perp=P_{(\operatorname{ran}E)^\perp}$ である． 2つの射影作用素 E, F が**直交する**とは，$\operatorname{ran} E\perp\operatorname{ran} F$ のときをいう．このとき $E\perp F$ と書く．

問 命題 3°, 4° を証明せよ．

II. 非有界作用素

この項では，非有界作用素に関する基本的な定義と命題を述べる．A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への作用素とし，$\operatorname{dom} A$ は必ずしも $\mathcal{H}$ 全体でないとする．この A に対して，$\mathcal{G}(A)\equiv\{x\oplus Ax\ ;\ x\in\operatorname{dom} A\}$ （$\subset\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$）を A の**グラフ**という．$\mathcal{G}(A)$ が直和空間 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ で閉集合のとき，A を**閉作用素**という．これは，$\|x_n-x\|\to 0$, $\|Ax_n-y\|\to 0$ ならば $x\in\operatorname{dom} A$ かつ $y=Ax$ となることと同値である． 2つの作用素 A, B に対して，$A\subset B$ （B は A を含む）とは，$\mathcal{G}(A)\subset\mathcal{G}(B)$，すなわち $\operatorname{dom} A\subset\operatorname{dom} B$ かつ $Ax=Bx$ （$\forall x\in\operatorname{dom} A$） である場合をいう．$A$を含む閉作用素$B$が存在するとき，$A$を**閉化可能**な作用素（または**可**

閉作用素）といい，そのようなBのうちで最小のものをAの**閉包**と呼び，$\bar{A}$で表す．すなわち$\mathcal{G}(\bar{A})=\overline{\mathcal{G}(A)}$である．

$\mathcal{H}$から$\mathcal{H}$への作用素を単に$\mathcal{H}$上の作用素という．$\mathcal{H}$上の作用素Aに対して，『$x'\in\mathcal{H}$が存在して$\langle x, Ay\rangle=\langle x', y\rangle$（$\forall y\in\mathrm{dom}\,A$）』という命題が成立するような$x\in\mathcal{H}$の全体を$\mathcal{D}$とおく．いま$A$が稠密な定義域をもつ，すなわち$\overline{\mathrm{dom}}\,A$（dom Aの閉包）$=\mathcal{H}$ならば，上記命題における対応$x\in\mathcal{D}\mapsto x'\in\mathcal{H}$は一意的に定まる．このとき$A^*x=x'$（$x\in\mathcal{D}$）とおくと，$A^*$は$\mathcal{H}$上の作用素になる．この$A^*$を$A$の**共役作用素**という．$A\subset A^*$である$A$を**対称作用素**（または**Hermite作用素**）という．特に$A=A^*$，すなわちAが対称作用素で$\mathrm{dom}\,A=\mathrm{dom}\,A^*$のとき，$A$を**自己共役作用素**という．自己共役作用素$A$が**正**であるとは，$\langle x, Ax\rangle\geqq 0$（$\forall x\in\mathrm{dom}\,A$）のときをいう．

非有界作用素の基本性質は次にまとめられる．

5° $\overline{\mathrm{dom}}\,A=\mathcal{H}$のとき，次が成立する：（1）共役作用素$A^*$は常に閉作用素である；（2）$A$が対称作用素ならば，$A$は可閉である；（3）$A$が可閉であることは$\overline{\mathrm{dom}}\,A^*=\mathcal{H}$と同値であり，このとき$\bar{A}=A^{**}$；（4）$A$が閉作用素ならば，$\{x\in\mathrm{dom}\,A\ ;\ Ax\in\mathrm{dom}\,A^*\}$は$\mathcal{H}$で稠密であり，その上で定義された$A^*A$は自己共役である．

証明（1）：$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$上のユニタリー作用素$U$を$U(x\oplus y)=(-y)\oplus x$（$x, y\in\mathcal{H}$）で与える．$\langle x\oplus x', U(y\oplus Ay)\rangle=-\langle x, Ay\rangle+\langle x', y\rangle$（$\forall y\in\mathrm{dom}\,A$）より，$\mathcal{G}(A^*)=U(\mathcal{G}(A))^{\perp}$がわかる．よって$\mathcal{G}(A^*)$は閉集合である．

（2）は（1）より明らか．

（3）：$\mathcal{G}(A)$は$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$の部分空間で$U^2=-I$だから

$$\overline{\mathcal{G}(A)}=\mathcal{G}(A)^{\perp\perp}=U(U(\mathcal{G}(A))^{\perp})^{\perp}=U(\mathcal{G}(A^*))^{\perp}.$$

$\overline{\mathrm{dom}}\,A^*=\mathcal{H}$ならば$\overline{\mathcal{G}(A)}=\mathcal{G}(A^{**})$．よって$A$は可閉で$\bar{A}=A^{**}$．逆に，$\overline{\mathrm{dom}}\,A^*\neq\mathcal{H}$ならば$0\neq x\in(\overline{\mathrm{dom}}\,A^*)^{\perp}$がとれる．このとき$0\oplus x\in U(\mathcal{G}(A^*))^{\perp}$となるから，$\overline{\mathcal{G}(A)}$は作用素のグラフにならない．

やや難しい（4）の証明は略する．▌

$\bar{A}=A^{**}$が自己共役である対称作用素Aを**本質的自己共役**という．

6° $\mathrm{dom}\,A=\mathcal{H}$である閉作用素は有界である．

これは後述の閉グラフ定理（1.5節8°）の特別な場合である．直接の証明は読者自ら試みてほしい．

III.　作用素の例

（1）　**微分作用素** P：有限区間 $[a,b]$ 上の Lebesgue 測度による $L^2(a,b)$（1.6 節参照）で考える．$[a,b]$ で微分可能な函数 $\boldsymbol{x}$ で $\boldsymbol{x}'\in L^2(a,b)$，$x(a)=x(b)=0$ を満たすものの全体を $\mathcal{D}$ とおくと，$\mathcal{D}$ は $L^2(a,b)$ の稠密な部分空間である．作用素 P は $Px=-ix'$ $(x\in\mathcal{D})$ で定義される．部分積分法を用いて $\langle x,Py\rangle=\langle Px,y\rangle$ $(\forall x,y\in\mathcal{D})$ が成立し，P の閉包 $\bar{P}$ は自己共役になることがわかる．つまり，P は本質的自己共役である．半直線 $[0,\infty)$，全直線 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$ 上の微分作用素も同様に定義される．

（2）　**位置作用素** Q：コンパクト台をもつ $\boldsymbol{R}$ 上の連続函数の全体 $C_{00}(\boldsymbol{R})$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ の稠密な部分空間である．$(Qx)(t)=tx(t)$ $(x\in C_{00}(\boldsymbol{R}))$ とおくと，Q は可閉で，閉包 $\bar{Q}$ は自己共役である．$\boldsymbol{R}$ を有限区間 $[a,b]$ に置き換えた場合，$\bar{Q}$ は $L^2(a,b)$ 上の有界自己共役作用素である．

（3）　**正準交換関係**　$\bar{P},\bar{Q}$ を（1），（2）で定義した $L^2(\boldsymbol{R})$ 上の作用素とすると，$\bar{P}\bar{Q}-\bar{Q}\bar{P}=-iI$ の関係が成立する．さらに，$L^2(\boldsymbol{R})$ 上の Fourier 変換（1.9 節参照）を $\mathcal{F}$ で表すと，$\bar{Q}=\mathcal{F}\bar{P}\mathcal{F}^{-1}$ となる．この作用素の対 $\bar{P},\bar{Q}$ は量子力学系における不確定性関係を論じる場合に基本的であり，Fourier 解析や信号解析と関連して興味ある数学理論が展開される（詳しくは文献 [10] の第 6 章など参照）．

問　（1）　$L^2(a,b)$ または $L^2(\boldsymbol{R})$ 上の作用素 $\bar{P}$ の定義域 $\mathrm{dom}\,\bar{P}$ を求めよ．
（2）　上記の正準交換関係を導け．

1.4　スペクトル分解と極分解

$\mathcal{H}$ 上の作用素 $A:\mathrm{dom}\,A\to\mathrm{ran}\,A$ が逆作用素 $A^{-1}:\mathrm{ran}\,A\to\mathrm{dom}\,A$ をもつのは，A が 1 対 1 (i.e.，$\ker A=\{0\}$) の場合である．複素数 λ に対する $(A-\lambda I)^{-1}$ の存在に関連して，複素数全体 $\boldsymbol{C}$ を次のように分類する．なお，$(A-\lambda I)^{-1}$ が存在するとき，$\mathrm{dom}(A-\lambda I)^{-1}=\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ である．

（1）　**リゾルベント集合**：$\mathrm{Re}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\}$．

（2）　**スペクトル集合**：$\mathrm{Sp}(A)\equiv\boldsymbol{C}\backslash\mathrm{Re}(A)$ ($\mathrm{Re}(A)$ の補集合)．

上の（1）で $(A-\lambda I)^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ とは，正確には，$(A-\lambda I)^{-1}$ が存在し

$\overline{\mathrm{ran}}(A-\lambda I)=\mathcal{H}$ であり，かつ $(A-\lambda I)^{-1}$ が $\mathrm{ran}(A-\lambda I)$ 上で有界であるときをいう．スペクトル集合 $\mathrm{Sp}(A)$ は，さらに以下の3つの集合に分けられる．

（3）　**点スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ が存在しない$\}$．

（4）　**連続スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(c)}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ が存在するが非有界で $\overline{\mathrm{ran}}(A-\lambda I)=\mathcal{H}\}$．

（5）　**剰余スペクトルの集合**：$\mathrm{Sp}^{(r)}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(A-\lambda I)^{-1}$ が存在するが非有界で $\overline{\mathrm{ran}}(A-\lambda I)\neq\mathcal{H}\}$．

A の各スペクトルの集合は互いに素であり，$\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(c)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(r)}(A)$．

$\lambda\in\boldsymbol{C}$ が A の**近似点スペクトル**とは，点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$（$\|x_n\|\geqq 1$）が存在して $\|(A-\lambda I)x_n\|\to 0$ となるときをいう．このスペクトルの集合を $\mathrm{Sp}^{(a.p.)}(A)$ で表すと，次が成立する：（1）$\mathrm{Sp}^{(p)}(A)\cup\mathrm{Sp}^{(c)}(A)\subset\mathrm{Sp}^{(a.p.)}(A)\subset\mathrm{Sp}(A)$；（2）$\mathrm{Sp}^{(r)}(A)=\emptyset$ のとき，$\mathrm{Sp}^{(a.p.)}(A)=\mathrm{Sp}(A)$．

$\lambda\in\mathrm{Sp}^{(p)}(A)$ を A の**固有値**といい，$Ax=\lambda x$ となる $x\in\mathcal{H}$ を固有値 λ に対する**固有ベクトル**という．λ に対する固有ベクトル全体 $\mathcal{H}_\lambda\equiv\ker(A-\lambda I)$ を λ の**固有空間**といい，その次元 $\dim\mathcal{H}_\lambda$ を λ の**重複度**（または**多重度**）という．重複度が1の固有値を**単純**（または**非縮退**）スペクトルと呼ぶ．

自己共役作用素の増大（resp．減少）ネット $\{A_\alpha\}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して $\|A_\alpha x-Ax\|\to 0$（$\forall x\in\mathcal{H}$）のとき，$A_\alpha\uparrow A$（resp. $A_\alpha\downarrow A$）と書く．$\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族 $\{E_\lambda\,;\,\lambda\in\boldsymbol{R}\}$ が（i）$E_\lambda\leqq E_\mu$（$\lambda<\mu$）；（ii）$E_\mu\downarrow E_\lambda$（$\mu\downarrow\lambda$）；（iii）$E_\lambda\downarrow 0$（$\lambda\to-\infty$）；（iv）$E_\lambda\uparrow I$（$\lambda\to\infty$）を満たすとき，$\{E_\lambda\}$ を**スペクトル測度**または**単位の分解**という．スペクトル測度 $\{E_\lambda\}$ は次の性質をもつ．

1°　射影作用素 $E_{\lambda-0}$ が存在して $E_\mu\uparrow E_{\lambda-0}$（$\mu\uparrow\lambda$）．

2°　$\mathcal{D}=\{x\in\mathcal{H}\,;\,\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2<\infty\}$ は $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間である．

3°　$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ を $\langle x,Ay\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\langle x,E_\lambda y\rangle$（$x\in\mathcal{H},y\in\mathcal{D}$）で定めると，$A$ は $\mathrm{dom}\,A=\mathcal{D}$ である自己共役作用素となる．

問　命題1°～3°を証明せよ．

3°の逆は著名な**スペクトル分解定理**といわれるもので，作用素のスペクト

ル解析の基本定理である．その証明には多くの準備を要する．

〈定理 1.7〉 自己共役作用素 A に対して，スペクトル測度 $\{E_\lambda\}$ が一意に存在して，$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ と表せる．

この定理において，『$E_{\lambda-0}\neq E_\lambda \Longleftrightarrow \lambda\in \mathrm{Sp}^{(p)}(A)$』であり，このとき $\mathrm{ran}(E_\lambda-E_{\lambda-0})$ が λ の固有空間になる．また，上の作用素 A において $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}^{(p)}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ のとき，$P_n=E_{\lambda_n}-E_{\lambda_n-0}$ とおくと，$\{P_n\}$ は互いに直交して $A=\sum_n \lambda_n P_n$ と表せる．A が正の自己共役作用素のときは，$E_\lambda=0$ $(\forall\lambda<0)$ となり，$A=\int_0^{\infty}\lambda dE_\lambda$ と書ける．さらに A が有界で $aI\leqq A\leqq bI$ のときは，$E_{a-0}=0$，$E_b=I$ となり，$A=\int_a^b\lambda dE_\lambda$ と書ける．

スペクトル測度が $\{E_\lambda\,;\,-\pi<\lambda\leqq\pi\}$，つまり $E_{-\pi}=0$，$E_\pi=I$ である場合，

4° $U=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda}dE_\lambda$ は $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素であり，$U^n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dE_\lambda$ $(\forall n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．

この逆も〈定理 1.7〉と同様に定式化できる．すなわち，

5° $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素 U に対して，スペクトル測度 $\{E_\lambda\,;\,-\pi<\lambda\leqq\pi\}$ が一意に存在して，$U^n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\lambda}dE_\lambda$ $(\forall n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ と表せる．

次の 6° およびその逆 7° も重要である．

6° 自己共役作用素 $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ に対して $U_t=e^{itA}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dE_\lambda$ $(t\in\boldsymbol{R})$ とおくと，$\{U_t\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}$ は連続な**1径数ユニタリー群**となる．すなわち $U_0=I$，$U_{s+t}=U_sU_t$，$U_t{}^*=U_{-t}$ $(\forall s,t\in\boldsymbol{R})$ であり，$\lim_{t\to0}\|(U_t-I)x\|=0$ $(\forall x\in\mathcal{H})$．

7° Stone の定理：連続な1径数ユニタリー群 $\{U_t\}$ に対して，スペクトル測度 $\{E_\lambda\}$ が一意に存在して，$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}dE_\lambda$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ と表せる．

註 上記のスペクトル分解の理論を十分に説明するには優にひとつの章を必要とし，また多くの興味ある応用も論じられる．しかし，これらは本書の最終的な目標でないので割愛する．

正作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，スペクトル分解 $A=\int_0^{\|A\|}\lambda dE_\lambda$ をとり，正

作用素 $B=\int_0^{\|A\|}\lambda^{1/2}dE_\lambda$ を定義する．スペクトル測度の性質を用いて積分計算をすると，$B^2=A$ がいえる．さらに，この関係を満たす正作用素 B が一意に定まることもわかる．この B を $A^{1/2}$ で表す．任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，A^*A は正作用素であり，$|A|=(A^*A)^{1/2}$ が定まる．$|A|$ は A の**絶対値**といわれる．もうひとつの有用な分解定理が次で与えられる．

〈定理 1.8〉　極分解定理：$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，初期空間が $\overline{\mathrm{ran}}|A|$，終空間が $\overline{\mathrm{ran}}\,A$（i.e.，$W^*W=P_{\overline{\mathrm{ran}}|A|}$, $WW^*=P_{\overline{\mathrm{ran}}A}$）である半等距離作用素 W が存在して，次の（1）～（4）が成立する：

（1）$A=W|A|$；（2）$|A|=W^*A$；（3）$A^*=W^*|A^*|$；

（4）$|A^*|=W|A|W^*$.

証明　対応 $W_0:|A|x\longmapsto Ax$ を考えると，等式 $\||A|x\|^2=\langle x,|A|^2x\rangle=\langle x,A^*Ax\rangle=\|Ax\|^2$（$\forall x\in\mathcal{H}$）によって，$W_0$ は $\mathrm{ran}|A|$ から $\mathrm{ran}\,A$ への等距離作用素である．したがって，W_0 は初期空間が $\overline{\mathrm{ran}}|A|$，終空間が $\overline{\mathrm{ran}}\,A$ の半等距離作用素 W に拡張される．このとき，W の構成から（1）は明らか．$W^*W=P_{\overline{\mathrm{ran}}|A|}$（1.3 節 4° 参照）より，$|A|=W^*W|A|=W^*A$ で（2）が成立する．$(W|A|W^*)^2=W|A|W^*W|A|W^*=W|A||A|W^*=AA^*=|A^*|^2$ より，（4）が得られる．最後に，$A^*=|A|W^*=W^*W|A|W^*=W^*|A^*|$ より，（3）が得られる．▌

8°　極分解 $A=W|A|$ は次の意味で一意である．半等距離作用素 V と正作用素 B が存在して $A=VB$ とし，V の初期空間が $\overline{\mathrm{ran}}\,B$ であるならば，$B=|A|$ かつ $V=W$.

証明　$|A|^2=A^*A=(VB)^*(VB)=BV^*VB=B^2$ で，$|A|,B$ が正作用素だから，$|A|=B$．さらに，$W|A|=V|A|$ で，W,V の初期空間が $\overline{\mathrm{ran}}|A|$ だから，$W=V$．▌

註　A が非有界作用素でも，A が $\overline{\mathrm{dom}}\,A=\mathcal{H}$ である閉作用素ならば，$|A|=(A^*A)^{1/2}$ が存在し（1.3 節 5° の（4）参照），極分解定理が成立する．

問　（1）$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が自己共役ならば，射影作用素 P が存在して $A=P|A|-P^\perp|A|$（ただし $P^\perp=I-P$）となることを示せ．

（2）$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が正規作用素または有限階作用素（i.e.，$\dim(\mathrm{ran}\,A)<\infty$）のとき，$A$ の極分解における W をユニタリー作用素にとれる．これを証明せよ．

1.5 線形位相空間と Banach 空間

この節では，後章に対する準備として函数解析の基本的な概念と諸定理について述べる．これらは，一般常識といえるもので，近代的解析学を学ぶ際に必要な知識でもある．各定理の証明については，函数解析関係の本ならばどれを参照されてもよいので，ここでは割愛する．

数体 $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) 上の線形空間 X が位相空間であり，写像 $(x,y)\in X\times X\longmapsto x+y\in X$ および $(\lambda,x)\in\boldsymbol{K}\times X\longmapsto\lambda x\in X$ が連続であるとき，X を ($\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ なら実，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ なら複素) **線形位相空間**という．X の零元 0 の近傍基 $\mathcal{V}$ が存在して，各 $V\in\mathcal{V}$ が凸集合であるとき，X を**局所凸**であるという．

線形空間 X 上の汎函数 $p:X\to\boldsymbol{R}$ が次の 3 条件を満たすとき，p を**半ノルム**という：任意の $x,y\in X$, $\lambda\in\boldsymbol{K}$ に対して，(i) $p(x)\geqq 0$；(ii) $p(x+y)\leqq p(x)+p(y)$；(iii) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$．また，(ii) と (iii′) $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ $(\forall\lambda\geqq 0)$ だけを満たす p は**半線形**であるといわれる．半ノルムの族 $\{p_j\,;\,j\in J\}$ が X の元を**分離する**とは，$p_j(x)=0$ $(\forall j\in J)$ ならば $x=0$ となるときをいう．線形空間 X の部分集合 V が**均衡** (balanced) であるとは，任意の $x\in V$ と $\lambda\in\boldsymbol{K}$, $|\lambda|=1$ に対して $\lambda x\in V$ となるときをいう．また，任意の $x\in X$ に対して，$x\in\lambda V$ となる $\lambda>0$ が存在するとき，V は**吸収的** (absorbent) であるという．これらの用語の下に，

1° 線形空間 X の吸収的凸部分集合 V に対して，汎函数

$$p_V(x)\equiv\inf\{\lambda>0\,;\,x\in\lambda V\},\quad x\in X$$

は半線形である．さらに V が均衡であれば，p_V は半ノルムになる．

問 命題 1° を証明せよ．

2° 線形位相空間 X において，零元 $0\in X$ の近傍基 $\mathcal{V}$ で各 $V\in\mathcal{V}$ が均衡集合であるものが存在する．さらに X が局所凸ならば，各 $V\in\mathcal{V}$ が均衡凸集合であるようにできる．

3° 線形空間 X において，半ノルム p に対して集合 $V_p\equiv\{x\in X\,;\,p(x)<1\}$ は均衡かつ凸である．さらに，X 上の半ノルムの族 $\{p_j\,;\,j\in J\}$ に対して V_j

$=V_{p_j}$とおくと，集合族 $\{\lambda V_j\,;\,\lambda>0,\ j\in J\}$ はXに局所凸な線形位相を定義する（ただし，この集合族からとった有限個の共通部分の全体を$0\in X$の近傍基とする）．このとき，ネット $\{x_\alpha\}\subset X$ に対して，『$x_\alpha\to x \Longleftrightarrow p_j(x_\alpha-x)\to 0$ $(\forall j\in J)$』が成立する．

4°　局所凸線形位相空間Xの均衡凸集合からなる$0\in X$の近傍基$\mathcal{V}$に対して，XがHausdorff位相であることと $\{p_V\,;\,V\in\mathcal{V}\}$ がXの元を分離することとは同値である．

〈定理 1.9〉 Hahn-Banach の定理：（1）　pを線形空間X上の半ノルム (resp. 半線形汎函数) とし，YをXの部分空間とする．Y上の線形汎函数 (resp. 実線形汎函数) gが $|g(y)|\leqq p(y)$ (resp. $g(y)\leqq p(y)$) $(\forall y\in Y)$ を満たすとき，X上の線形汎函数 (resp. 実線形汎函数) fが存在して，$f\restriction Y$ (Y上への制限)$=g$ かつ $|f(x)|\leqq p(x)$ (resp. $f(x)\leqq p(x)$) $(\forall x\in X)$．

（2）　局所凸線形位相空間Xの凸集合E, Fに対して，零元0が$E-F=\{x-y\,;\,x\in E, y\in F\}$ の閉包に属さないならば，X上の連続な線形汎函数fが存在して，

$$\sup\{\mathrm{Re}\,f(x)\,;\,x\in E\}<\inf\{\mathrm{Re}\,f(y)\,;\,y\in F\}.$$

次に，Xがノルム空間の場合を考えよう．距離 $d(x,y)=\|x-y\|$ $(x,y\in X)$ による距離位相によってXは局所凸な線形位相空間である．Hilbert空間$\mathcal{H}$の場合と全く同様に，X上の有界線形汎函数が定義され，それらの全体をX^*で表す．$f\in X^*$のノルム $\|f\|$ も $f\in\mathcal{H}^*$ の場合と同じである（1.2節6°参照）．同じく，X^*が完備なノルム空間つまりBanach空間になることも容易に示される．X^*をXの**共役空間**という．空間X^*が十分に多くの元を含む，すなわちX^*がXの元を**分離する** (i.e., $f(x)=0,\ \forall f\in X^*\Rightarrow x=0$) ことは，次の命題5°によって保証される．$Y$をノルム空間$X$の部分空間とするとき（$Y$もそれ自身ノルム空間と考える），Hahn-Banachの定理の系として，

5°　（1）　任意の$g\in Y^*$に対して，$f\in X^*$が存在して$f\restriction Y=g$ かつ $\|f\|=\|g\|_Y$.

（2）　任意の$x\in X$, $x\neq 0$ に対して，$f(x)=\|x\|$, $\|f\|=1$ となる $f\in X^*$ が

存在する．これより，X^* は X の元を分離する．

（3）　$\mathrm{dist}(x, Y)=d$ とおくとき，$f\in X^*$ が存在して $\|f\|\leqq 1$，$f(x)=d$，$f(y)=0$ $(\forall y\in Y)$．

問　命題 5° を証明せよ．

ノルム空間 X の共役空間 X^* は Banach 空間であるから，その共役空間である Banach 空間 X^{**} が考えられる．これを X の**第 2 共役空間**という．各 $x\in X$ に対して $\dot{x}(f)=f(x)$ $(f\in X^*)$ と定めると，$\dot{x}\in X^{**}$ で $\|x\|=\|\dot{x}\|$ であることが容易にいえる．x と $\dot{x}$ を同一視して X を X^{**} に埋め込むと，X を X^{**} の部分空間（i.e.，$X=\{\dot{x}\,;\,x\in X\}\subset X^{**}$）とみなせる．このとき，$X$ が Banach 空間であることと X が X^{**} の閉部分空間であることは同値である．$X=X^{**}$ のとき，X は**回帰的**であるという．

2 つのノルム空間 X, Y に対して，X から Y への有界線形作用素の全体を $\boldsymbol{B}(X, Y)$ で表す．$\boldsymbol{B}(X, Y)$ における線形演算，$A\in\boldsymbol{B}(X, Y)$ のノルム $\|A\|$ の定義は 1.3 節 I と同じである．この場合も，Y が Banach 空間ならば，$\boldsymbol{B}(X, Y)$ は Banach 空間になる．ここで Banach 空間に関する基本定理をいくつか述べよう．

6°　Banach-Steinhaus の定理（一様有界定理）：X を Banach 空間，Y をノルム空間とする．部分集合 $\mathscr{B}\subset\boldsymbol{B}(X, Y)$ が各 $x\in X$ で $\sup\{\|Ax\|\,;\,A\in\mathscr{B}\}<\infty$ ならば，$\mathscr{B}$ は一様有界（i.e.，$\sup\{\|A\|\,;\,A\in\mathscr{B}\}<\infty$）である．

これの特別な場合として，

7°　X が Banach 空間で，$S\subset X^*$ が $\sup\{|f(x)|\,;\,f\in S\}<\infty$ $(\forall x\in X)$ ならば，S は X^* のノルムで一様有界である．

次に述べるのは，**開写像定理**，**Banach の同型定理**，**閉グラフ定理**である．

8°　X, Y が Banach 空間のとき，次が成立する：（1）$\mathrm{ran}\,A=Y$（**全射**という）である $A\in\boldsymbol{B}(X, Y)$ は開写像である；（2）（1）の A が 1 対 1 ならば，$A^{-1}\in\boldsymbol{B}(Y, X)$；（3）$X$ 全体で定義された Y への線形作用素 A に対して，$A\in\boldsymbol{B}(X, Y)\Longleftrightarrow A$ が閉作用素．ここで A が閉作用素とは，A のグラフ $\mathcal{G}(A)=\{(x, Ax)\,;\,x\in X\}$ が $X\oplus Y$ で閉集合のときをいう．

さて，線形空間 X から $\boldsymbol{K}$ への線形汎函数の全体を $L(X, \boldsymbol{K})$ で表す．部分

集合 $\mathcal{F}\subset L(X,\boldsymbol{K})$ に対して，各 $f\in\mathcal{F}$ を連続にする X 上の最弱な線形位相を $\mathcal{F}$**-弱位相**または $\sigma(X,\mathcal{F})$ **位相**という．各 $f\in\mathcal{F}$ は半ノルム $p_f(x)=|f(x)|$ $(x\in X)$ を定めるが，$\sigma(X,\mathcal{F})$ 位相はこの半ノルムの族 $\{p_f\,;\,f\in\mathcal{F}\}$ によって定義される．したがって，$\mathcal{F}$ が X の元を分離するとき，$\sigma(X,\mathcal{F})$ 位相は局所凸 Hausdorff 位相になる．

X がノルム空間のとき，$X^*\subset L(X,\boldsymbol{K})$ であり，$X\subset X^{**}\subset L(X^*,\boldsymbol{K})$ である．したがって，X 上に $\sigma(X,X^*)$ 位相，X^* 上に $\sigma(X^*,X)$ 位相が定義され，それぞれ X の**弱位相**，X^* の**弱＊位相**といわれる．ノルム空間 X の単位球を $X_1\equiv\{x\in X\,;\,\|x\|\leqq 1\}$ で表す．

9° Banach-Alaoglu の定理：X がノルム空間のとき，$(X^*)_1$ は弱＊位相でコンパクトである．

点列 $\{x_n\}\subset X$ が $x\in X$ に**弱収束**するとは，$f(x_n)\to f(x)$ $(\forall f\in X^*)$ のときをいう．これに対し，$\|x_n-x\|\to 0$ のときは，$\{x_n\}$ が x に**強収束**するという．部分集合 $S\subset X$ が**弱点列コンパクト**であるとは，任意の点列 $\{x_n\}\subset S$ がある $x\in X$ に弱収束する部分列を含むときをいう．また，$S\subset X$ が**相対弱コンパクト**であるとは，弱位相による S の閉包が弱位相でコンパクトであるときをいう．

10° Eberlein-Šmulian の定理：Banach 空間 X の部分集合 S が相対弱コンパクトであることは，S が弱点列コンパクトであることと同値である．

11° Krein-Šmulian の定理：X が Banach 空間のとき，X^* の凸部分集合 S が弱＊閉（i. e.，弱＊位相で閉）であることは，$S\cap(X^*)_r$ $(\forall r>0)$ が弱＊閉であることと同値である．ただし $(X^*)_r\equiv\{f\in X^*\,;\,\|f\|\leqq r\}$．

次に，線形位相空間の場合に戻る．以下，X を Hausdorff 位相をもつ線形位相空間とし，K を X の空でない凸集合とする．$x\in K$ が K の**端点**（extreme point）とは，いかなる2点 $y,z\in K$ $(y\neq z)$ と $0<\lambda<1$ に対しても $x=\lambda y+(1-\lambda)z$ とならない場合をいう．K の端点の集合を $\mathrm{ex}\,K$ で表す．$S\subset X$ を含む最小の凸集合を S の**凸包**（convex hull）といい，その閉包を S の**閉凸包**という．これらは $\mathrm{co}\,S$ および $\overline{\mathrm{co}}\,S$ で表される．

12° Krein-Milman の定理：X が局所凸で $K\subset X$ がコンパクト凸集合のとき，（1）$\mathrm{ex}\,K\neq\emptyset$；（2）$K=\overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{ex}\,K$．

最後に，不動点定理をいくつか述べよう．

13° Schauder-Tychonoff の不動点定理：X が局所凸で $K \subset X$ がコンパクト凸集合のとき，連続写像 $T: K \to K$ は常に不動点 $x_0 = Tx_0 \in K$ をもつ.

14° Kakutani-Markov の不動点定理：$K \subset X$ がコンパクト凸集合のとき，連続なアフィン写像 $T: K \to K$(i.e., $T(\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda Tx + (1-\lambda) Ty$, $\forall x, y \in K, 0 \leqq \forall \lambda \leqq 1$) の任意の可換な族 $\mathcal{T}$ (i.e., $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}$) に対して，$x_0 \in K$ が存在して $Tx_0 = x_0$ ($\forall T \in \mathcal{T}$).

X が局所凸なとき，X 上の連続線形汎函数の全体 X^* は X の元を分離するから，ノルム空間の場合と同様に X 上に弱位相 (i.e., $\sigma(X, X^*)$ 位相) が定義できる.

15° Ryll-Nardewski の不動点定理：X が局所凸で $K \subset X$ が弱コンパクト凸集合とする．$\mathcal{T}$ は弱位相で連続なアフィン写像 $T: K \to K$ からなる半群であり，任意の $x, y \in K$ ($x \neq y$) に対して，X 上の連続な半ノルム p が存在して $\inf\{p(Tx - Ty)\ ;\ T \in \mathcal{T}\} > 0$ が成立するとする．このとき，$x_0 \in K$ が存在して $Tx_0 = x_0$ ($\forall T \in \mathcal{T}$).

1.6 数列空間と函数空間

この節では，本書で使われる具体的な Banach 空間，Hilbert 空間を説明し，それらに関する基本的結果を述べよう.

I. 数列空間

複素数列 $x = \{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots\}$ の全体を $\mathcal{S}$ で表す．$x = \{x_n\}$，$y = \{y_n\} \in \mathcal{S}$，$\lambda, \mu \in \boldsymbol{C}$ に対して $\lambda x + \mu y = \{\lambda x_n + \mu y_n\}$ とし，零元を $0 = \{0, 0, \cdots\}$ とすると，$\mathcal{S}$ は線形空間になる．$\mathcal{S}$ の有用な部分空間を定義する.

$$f_0 \equiv \{x \in \mathcal{S}\ ;\ x_n \neq 0 \text{ である } x_n \text{ は有限個}\},$$

$$c_0 \equiv \{x \in \mathcal{S}\ ;\ \lim_n x_n = 0\},$$

$$c \equiv \{x \in \mathcal{S}\ ;\ \lim_n x_n \text{ が存在}\},$$

$$l^p \equiv \left\{x \in \mathcal{S}\ ;\ \|x\|_p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\right\} \quad (1 \leqq p < \infty),$$

$$l^\infty \equiv \{x \in \mathcal{S}\ ;\ \|x\|_\infty \equiv \sup_n |x_n| < \infty\}.$$

これらは数列空間と名づけられ，f_0 以外はすべて各ノルムにより Banach 空間になる．ただし，c_0, c, l^∞ 上のノルムはともに $\|x\|_\infty = \sup|x_n|$ とする.

註　数列空間の Banach 空間としての性質は，作用素代数との関係も含めて，2.5 節で論述する．

II. $C(\Omega)$ 空間

Ω がコンパクト Hausdorff 空間のとき，Ω 上の複素数値連続函数の全体からなる線形空間を $C(\Omega)$ で表す．各 $f\in C(\Omega)$ は有界であり，sup ノルム $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$ によって $C(\Omega)$ は Banach 空間になる．

Ω が局所コンパクト Hausdorff 空間のとき，無限遠点で 0 (i.e., 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\{\omega\in\Omega\,;\,|f(\omega)|\geqq\varepsilon\}$ がコンパクト) である Ω 上の複素数値連続函数 f の全体を $C_0(\Omega)$ で表す．上述の $C(\Omega)$ と同様に，$C_0(\Omega)$ は線形空間であり，sup ノルムにより Banach 空間になる．

空間 $C(\Omega)$ および $C_0(\Omega)$ は各点ごとの積に関して環の条件を満たしている．よって，これらは代数になる．部分空間 $\mathcal{A}(\subset C(\Omega)$ または $C_0(\Omega))$ がさらに部分環であるとき，$\mathcal{A}$ を部分代数という (1.7 節参照)．

1° Stone-Weierstrass の定理：Ω がコンパクト Hausdorff 空間のとき，部分代数 $\mathcal{A}\subset C(\Omega)$ が次の 3 条件：(i) $\mathcal{A}$ が Ω の点を分離する (i.e., 任意の $\omega,\omega'\in\Omega,\omega\neq\omega'$ に対して，$f\in\mathcal{A}$ が存在して $f(\omega)\neq f(\omega')$)；(ii) $f\in\mathcal{A}$ ならば $\bar{f}\in\mathcal{A}$；(iii) $1\in\mathcal{A}$ を満たすならば，$\mathcal{A}$ は $C(\Omega)$ で稠密である．Ω が局所コンパクトのとき，部分代数 $\mathcal{A}\subset C_0(\Omega)$ が 3 条件 (i)，(ii)，(iii′) 任意の $\omega\in\Omega$ に対して，$f\in\mathcal{A}$ が存在して $f(\omega)\neq 0$ を満たすならば，$\mathcal{A}$ は $C_0(\Omega)$ で稠密である．

局所コンパクト Hausdorff 空間 Ω の Borel 集合体を $\mathcal{B}(\Omega)$ で，Baire 集合体を $\mathcal{B}_0(\Omega)$ で表す．Ω 上の Borel 測度 μ が**正則**であるとは，任意の $F\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対して $\mu(F)=\sup\{\mu(K)\,;\,K\subset F, K$ はコンパクト$\}=\inf\{\mu(U)\,;\,U\supset F, U$ は開集合$\}$ が成立するときをいう．正則な有限 Borel 測度の全体を $M(\Omega)_+$ で表す．また，正則な複素数値 Borel 測度（これは Rodon 測度ともいわれ，$M(\Omega)_+$ の元の線形結合で書ける）の全体を $M(\Omega)$ で表す．任意の有限 Baire 測度は $M(\Omega)_+$ の元に一意に拡張できる．

2° Riesz-Markov-Kakutani の定理：$\varphi\in C_0(\Omega)^*$ が $\varphi\geqq 0$ (i.e., $f\geqq 0\Rightarrow\varphi(f)\geqq 0$) のとき，$\mu\in M(\Omega)_+$ が一意に存在して $\varphi(f)=\int_\Omega fd\mu$ $(\forall f\in C_0(\Omega))$．

さらに，任意の $\varphi\in C_0(\Omega)^*$ に対して，$\mu\in M(\Omega)$ が一意に存在して $\varphi(f)=\int_\Omega fd\mu$ $(\forall f\in C_0(\Omega))$．このとき，$\|\varphi\|$ は μ の全変動ノルム

$$\|\mu\|\equiv\sup\left\{\sum_{i=1}^n|\mu(F_i)|\ ;\ \{F_1,\cdots,F_n\}\text{ は }\Omega\text{ の Borel 有限分割}\right\}$$

に等しい．したがって，Banach 空間として $C_0(\Omega)^*=M(\Omega)$ と同一視できる．

コンパクト Hausdorff 空間 Ω に対して，次は同値である：(1) Ω が第2可算公理を満たす；(2) Ω が距離付け可能；(3) $C(\Omega)$ が可分．さらに，これらの条件が満たされるとき，$\mathcal{B}(\Omega)=\mathcal{B}_0(\Omega)$ となる．

III. L^p 空間

$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が測度空間のとき，Ω 上の複素数値可測函数 x で $\|x\|_p\equiv\left(\int_\Omega|x(\omega)|^pd\mu\right)^{1/p}<\infty$ となるものの全体を $L^p=L^p(\Omega)$ で表し，$\|x\|_\infty\equiv\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}|x(\omega)|<\infty$ となるものの全体を $L^\infty=L^\infty(\Omega)$ で表す．ただし，$L^p(1\leqq p\leqq\infty)$ では，$x(\omega)=y(\omega)$ a.e. のとき $x=y$ とする．

3° Hölder の不等式：$1/p+1/q=1$ $(1\leqq p\leqq\infty$；ただし $1/\infty=0)$ のとき，$\|xy\|_1\leqq\|x\|_p\|y\|_q$ $(\forall x\in L^p, \forall y\in L^q)$．

4° Minkowski の不等式：$1\leqq p\leqq\infty$ のとき，$\|x+y\|_p\leqq\|x\|_p+\|y\|_p$ $(\forall x, y\in L^p)$．

これにより $\|\cdot\|_p$ が L^p 上のノルムとなり，さらに L^p が Banach 空間になることが示せる．

5° Riesz の定理：$1/p+1/q=1$ $(1\leqq p<\infty,\ 1<q\leqq\infty)$ のとき，Banach 空間 L^p の共役空間は L^q である．ここで，$y\in L^q$ は $y(x)=\int_\Omega xyd\mu$ $(x\in L^p)$ によって $y\in(L^p)^*$ と同一視する．ただし，$p=1$ のときは μ が σ-有限測度であると仮定する．

数列空間 l^p, l^q $(1\leqq p, q\leqq\infty)$ に対しても，3°, 4°, 5° は全く同じく成立する．ただし，$x\in l^p$，$y\in l^q$ に対して $xy=\{x_ny_n\}$ であり，$y\in l^q$ は $y(x)=\sum_{n=1}^\infty x_ny_n$ によって $y\in(l^p)^*$ と同一視する．

級数 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^\infty\bar{x}_ny_n$ $(x,y\in l^2)$ は絶対収束し，l^2 上の内積となる．これによって l^2 は Hilbert 空間になる．同様に，$\langle x,y\rangle=\int_\Omega\bar{x}yd\mu$ $(x,y\in L^2)$ は L^2 上の内積となり，L^2 は Hilbert 空間になる．

次に述べる Radon–Nikodym の定理は測度積分論において最も重要な定理のひとつである．これの測度論的証明はそれほど簡単でないが，Riesz の定理を用いると以下のように容易である．

6° Radon-Nikodym の定理：$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を σ–有限測度空間とし，ν を $\mathcal{F}$ 上の有限測度とする．ν が μ–絶対連続（$\nu \ll \mu$ と書く）ならば，$x_0 \in L^1(\Omega, \mu)$ が存在して $\nu(E) = \int_E x_0 d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{F})$.（この x_0 を **Radon-Nikodym 微分**といい，$x_0 = d\nu/d\mu$ と書く.）

証明 簡単のため，μ を有限測度とし，$m = \mu + \nu$ とおく．各 $y \in L^2(\Omega, m)$ に対して，$\mu(y) = \int_\Omega y d\mu$, $\nu(y) = \int_\Omega y d\nu$ と定める．

$$|\mu(y)| \leqq \int_\Omega |y| d\mu \leqq \int_\Omega |y| dm \leqq m(\Omega)^{1/2} \|y\|_2$$

であるから，$\mu(\cdot)$ は L^2 上の有界線形汎函数となる．よって Riesz の定理より，$x_\mu \in L^2$ が一意に存在して $\mu(y) = \langle x_\mu, y \rangle$ $(\forall y \in L^2)$. 同様に，$x_\nu \in L^2$ が存在して $\nu(y) = \langle x_\nu, y \rangle$ $(\forall y \in L^2)$. このとき，$x_\mu \geqq 0$, $x_\nu \geqq 0$, $x_\mu + x_\nu = 1$ (m–a. e.) が容易にわかる．さらに，m と μ が同等（i. e., 互いに絶対連続）だから，$x_\mu(\omega) > 0$ (m–a. e.) もわかる．したがって $x_0(\omega) = x_\nu(\omega)/x_\mu(\omega)$ が m–a. e. で定義できる．任意の $y \in L^2$, $y \geqq 0$ に対して，

$$\int_\Omega x_0 y d\mu = \int_\Omega x_\mu x_0 y dm = \int_\Omega x_\nu y dm = \nu(y)$$

が成立するから，$x_0 \in L^1(\Omega, \mu)$ で目的の $x_0 = d\nu/d\mu$ を得る．∎

IV. L^2 空間のテンソル積

1.2 節の最後で定義したテンソル積 Hilbert 空間の例として，L^2 空間のテンソル積を考えよう．$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $(\Omega', \mathcal{F}', \mu')$ を 2 つの測度空間とし，$(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mu \otimes \mu')$ を直積測度空間とする．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，Ω 上で定義され $\mathcal{H}$ に値をとる強可測な函数 ξ で $\|\xi(\cdot)\| \in L^2(\Omega)$ であるものの全体を $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ で表す．これは線形空間であり，内積 $\langle \xi, \eta \rangle = \int_\Omega \langle \xi(\omega), \eta(\omega) \rangle d\mu$ $(\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{H}))$ によって Hilbert 空間になる．ただし，$\xi(\omega) = \eta(\omega)$ a. e. のとき $\xi = \eta$ とする．$\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \in L^2(\Omega) \odot \mathcal{H}$ に対して，$U\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^n f_i(\cdot) x_i$ と定めると，

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i(\cdot) x_i \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \langle x_i, x_j \rangle \overline{f_i(\omega)} f_j(\omega) d\mu$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \langle f_i, f_j \rangle \langle x_i, x_j \rangle = \left\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \right\|^2$$

より，U は $L^2(\Omega)\odot\mathcal{H}$ から $L^2(\Omega,\mathcal{H})$ への等距離作用素になる．よって U は $L^2(\Omega)\otimes\mathcal{H}$ から $L^2(\Omega,\mathcal{H})$ への等距離作用素に拡張される．さらに，単函数の全体が $L^2(\Omega,\mathcal{H})$ で稠密だから，U が全射であることがわかる．よって

7° $L^2(\Omega)\otimes\mathcal{H}\cong L^2(\Omega,\mathcal{H})$.

特に $\mathcal{H}=L^2(\Omega')$ の場合は，

8° $L^2(\Omega)\otimes L^2(\Omega')\cong L^2(\Omega, L^2(\Omega'))\cong L^2(\Omega\times\Omega')$.

これより，Hilbert 空間 $L^2(\Omega, L^2(\Omega'))$ の元は2変数の函数として同時可測である．

V. Banach 空間 $AC[a,b]$

閉区間 $[a,b]$ 上の実数値函数 x が絶対連続であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して

$$a\leqq t_0<t_1<\cdots<t_n\leqq b,\quad \sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})<\delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|<\varepsilon$$

のときをいう．この絶対連続な函数の全体を $AC[a,b]$ で表す．$[a,b]$ 上の函数 x に対して，『$x\in AC[a,b]\Longleftrightarrow y\in L^1(a,b)$ が存在して $x(t)=x(a)+\int_a^t y(s)ds$ $(\forall t\in[a,b])$』がよく知られている．この y は x の a.e. の意味での導函数となり，$y=x'$ と書く．

問 $AC[a,b]$ は sup ノルム $\|\cdot\|_\infty$ で完備でないノルム空間であり，$C[a,b]$ で稠密であることを示せ．

9° $x\in AC[a,b]$ のノルム $\|x\|$ を

$$\|x\|=\sup_{a\leq t\leq b}|x(t)|+\int_a^b|x'(s)|ds \quad (=\|x\|_\infty+\|x'\|_1)$$

で定めると，$AC[a,b]$ は Banach 空間となる．

問 命題 9° を証明せよ．

註 ここでは，$AC[a,b]$，$C[a,b]$ は実数値函数として述べたが，複素数値の場合でも全く同様である．

VI. Hilbert 空間 $A^2(\Gamma)$

Γ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域（i.e., 連結開集合）とする．Γ 上の解析的複素函数

f で $\|f\|_2=\left(\iint_\Gamma |f(z)|^2dxdy\right)^{1/2}<\infty$ (ここで $z=x+iy$) を満たすものの全体を $A^2(\Gamma)$ で表す．任意の $z\in\Gamma$ に対して，$\{\zeta\in\boldsymbol{C}\,;\,|\zeta-z|\leqq r\}\subset\Gamma$ となる $r>0$ をとる．各 $f\in A^2(\Gamma)$ の z での Taylor 展開を使って計算すると，

$$|f(z)|^2\leqq(\pi r^2)^{-1}\iint_{|\zeta-z|\leqq r}|f(\zeta)|^2dxdy\quad(\zeta=x+iy)$$

が得られる．つまり $|f(z)|\leqq\|f\|_2/\sqrt{\pi}r$ $(\forall f\in A^2(\Gamma))$ が成立する．

10° $A^2(\Gamma)$ は内積 $\langle f,g\rangle=\iint_\Gamma\overline{f(z)}g(z)dxdy$ $(f,g\in A^2(\Gamma))$ によって Hilbert 空間となる．

証明 $A^2(\Gamma)$ が線形空間であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ が内積の条件を満たすことは明らか．よって完備性を示せばよい．$\{f_n\}\subset A^2(\Gamma)$ が Cauchy 列のとき，任意の $z\in\Gamma$ に対して，上のように $r>0$ をとると，上述の不等式より

$$|f_m(z)-f_n(z)|\leqq\|f_m-f_n\|_2/\sqrt{\pi}r\to 0\quad(m,n\to\infty).$$

よって $f(z)=\lim_{n\to\infty}f_n(z)$ がすべての $z\in\Gamma$ で存在する．いま，$|w-z|\leqq r/2$ のとき，$\{\zeta\in\boldsymbol{C}\,;\,|\zeta-w|\leqq r/2\}\subset\Gamma$ だから，

$$|f_m(w)-f_n(w)|\leqq\|f_m-f_n\|_2/(\sqrt{\pi}r/2)\to 0\quad(m,n\to\infty).$$

したがって $\{f_n(w)\}$ は $|w-z|\leqq r/2$ で $f(w)$ に一様収束する．ゆえに，f は任意の $z\in\Gamma$ で解析的であるから，$f\in A^2(\Gamma)$ で $\|f_n-f\|_2\to 0$ を得る．▌

VII. L^2 空間における CONS の例

1.1 節では，Hilbert 空間において ONS や CONS を任意に与えて，展開公式を導いた．Hilbert 空間 l^2 では標準的な CONS は $\{e_n=(0,\cdots,1,0,\cdots)\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ で与えられる．ただし，e_n は n 番目が 1，他はすべて 0．以下，L^2 空間において頻繁に用いられるいくつかの基本的な ONS, CONS を列記しておく．有限区間 $[a,b]$，全直線 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$ 上の Lebesgue 測度による L^2 空間を $L^2(a,b), L^2(\boldsymbol{R})$ で書く．

（1） **三角函数系**：$L^2(-\pi,\pi)$ で $\{(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2}\cos nt, \pi^{-1/2}\sin nt\,;\,n=1,2,\cdots\}$ は CONS である．$L^2(-\pi,\pi)$ の函数の Fourier 展開は通常この CONS が用いられる．

（2） $L^2(-\pi,\pi)$ で $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}\,;\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ は CONS.

（3） **標本函数系**：$L^2(\boldsymbol{R})$ で

$$\left\{\sqrt{\frac{W}{\pi}}\,\frac{\sin W(t-n\pi/W)}{W(t-n\pi/W)}\,;\,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}\quad(W>0)$$

はONSであり，信号函数の標本化展開に用いられる（[10] の第6章参照）.

（4） **Legendre 多項式** $P_n(t)=(2^n n!)^{-1}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ に対して，$L^2(-1,1)$ で $\{\sqrt{(2n+1)/2}\,P_n(t)\ ;\ n=0,1,2,\cdots\}$ はCONS.

（5） **Hermite 多項式** $H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n}{dt^n}e^{-t^2}$ に対して，$L^2(\boldsymbol{R})$ で $\{(2^n n!)^{-1/2}\pi^{1/4}H_n(t)e^{-t^2/2}\ ;\ n=0,1,2,\cdots\}$ はCONS.

（6） **Laguerre 多項式** $L_n(t)=e^t\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$ に対して，$L^2(0,\infty)$ で $\{(n!)^{-1}L_n(t)e^{-t/2}\ ;\ n=1,2,\cdots\}$ はCONS.

1.7 種々な代数と同型写像

この節では，以下の章の議論の対象となる様々な代数を導入し，そのごく基本的性質について論じる.

以下，考察する系を構成している元の集合を $\mathscr{A}$ とする.

［定義 1.1］ $\mathscr{A}$ が数体 $\boldsymbol{K}$($\boldsymbol{C}$ または $\boldsymbol{R}$) 上の**代数**であるとは，$\mathscr{A}$ が次の性質を有する場合をいう：(i) $\mathscr{A}$ は $\boldsymbol{K}$ 上の線形空間；(ii) $\mathscr{A}$ において積が定義されていて，$\mathscr{A}$ はこの積に関して閉じている；(iii) 環の条件 $(AB)C=A(BC)$, $(A+B)C=AC+BC$, $A(B+C)=AB+AC$ ($\forall A,B,C\in\mathscr{A}$) が成立する.

任意の $A,B\in\mathscr{A}$ に対して $AB=BA$ を満たす代数 $\mathscr{A}$ を**可換代数**といい，そうでない代数を**非可換代数**という.

代数 $\mathscr{A}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ が積に関して閉じた部分空間であるとき，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ の**部分代数**という.

$IA=AI=A$ ($\forall A\in\mathscr{A}$) を満たす元 $I\in\mathscr{A}$ を**単位元**という．これは，存在すれば一意である．すべての代数が単位元を含むとは限らないが，単位元を含まない代数はそれを含む代数に容易に拡張できるので（〈定理 3.9〉参照），本書では特に断らない限り $I\in\mathscr{A}$ としている.

［定義 1.2］ $\boldsymbol{C}$ 上の代数 $\mathscr{A}$ の上の**対合** (involution) $*$ とは，以下の条件を満たす写像 $*: A\in\mathscr{A}\mapsto A^*\in\mathscr{A}$ のことである：任意の $A,B\in\mathscr{A}$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に

対して，（i）$(A^*)^*=A$；（ii）$(A+B)^*=A^*+B^*$；（iii）$(\lambda A)^*=\bar{\lambda}A^*$；（iv）$(AB)^*=B^*A^*$.

この対合 $*$ をもつ代数 $\mathcal{A}$ を **$*$ 代数**と呼ぶ．$*$ 代数の元 $A\in\mathcal{A}$ に対して，$A=A^*$ のとき A は**自己共役**であるといい，$A^*A=AA^*$ のとき**正規**，$A^*A=AA^*=I$ のとき**ユニタリー**であるという．さらに，$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ が $\mathcal{B}=\mathcal{B}^*\equiv\{B^*;B\in\mathcal{B}\}$ のとき，$\mathcal{B}$ は**自己共役**な集合であるという．$\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{B}$ が自己共役な集合のとき，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$ の **$*$ 部分代数**という．

$\mathcal{A},\mathcal{B}$ を2つの代数とする．線形写像 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が $\pi(AB)=\pi(A)\pi(B)$ $(\forall A,B\in\mathcal{A})$ を満たすとき，π を**準同型写像**という．さらに，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ とも $*$ 代数で，$\pi(A^*)=\pi(A)^*$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ のとき，π を **$*$ 準同型写像**という．また，π の核 $\ker\pi\equiv\{A\in\mathcal{A};\pi(A)=0\}$ が $\{0\}$ のとき，π は**忠実**であるといい，忠実な $*$ 準同型写像を **$*$ 同型写像**という．なお，$*$ 代数 $\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ への $*$ 準同型写像 π を $\mathcal{A}$ の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の**表現**と呼ぶ．以下，この表現を $\{\mathcal{H},\pi\}$ で表すことが多い．

代数 $\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{J}$ が $\mathcal{A}$ の**左**（resp. **右**）**イデアル**とは，$\mathcal{J}$ が $\mathcal{A}$ の部分空間で任意の $A\in\mathcal{A}$，$B\in\mathcal{J}$ に対して AB (resp. BA) $\in\mathcal{J}$ のときをいう．$\mathcal{J}$ が左イデアルかつ右イデアルのとき，$\mathcal{J}$ を**両側イデアル**という．$\mathcal{A}$ が $*$ 代数のとき，$\mathcal{J}$ が左イデアルならば $\mathcal{J}^*$ は右イデアルになる．したがって，$\mathcal{J}=\mathcal{J}^*$ のときは両側イデアルになる．

［定義 1.3］（1） $\mathcal{A}$ が**ノルム代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ がノルム空間かつ代数で $\|AB\|\leqq\|A\|\|B\|$ $(\forall A,B\in\mathcal{A})$.

（2） $\mathcal{A}$ が **Banach 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ が $\|\cdot\|$ に関して完備なノルム代数.

（3） $\mathcal{A}$ が **Banach $*$ 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ が対合 $*$ をもつ Banach 代数で $\|A^*\|=\|A\|$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

（4） $\mathcal{A}$ が **C* 代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ が Banach $*$ 代数で $\|A^*A\|=\|A\|^2$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

問 $\mathcal{A}$ $(\neq\{0\})$ が C* 代数で $I\in\mathcal{A}$ のとき，$\|I\|=1$ を示せ．

特に C* 代数が重要であるが，ここで C* 代数のいくつかの例を挙げよう．

（1） $n\times n$ 複素行列の全体 $\boldsymbol{M}_n=\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ $(=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^n))$ は C* 代数である．

（2） $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ は C* 代数である（1.3 節 3° 参照）．

（3） Ω が局所コンパクト Hausdorff 空間のとき，$C_0(\Omega)$（1.6 節 II 参照）は各点ごとの線形演算と積，$f^*(\omega)=\overline{f(\omega)}$，および sup ノルムにより C* 代数になる．

問 『Ω がコンパクト $\Longleftrightarrow C_0(\Omega)$ が単位元をもつ』を示せ．

C* 代数 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{A}$ の**可換子代数** (commutant) $\mathcal{A}'$ とは，$\mathcal{A}$ のすべての元と可換な $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元の集合である．すなわち，

$$\mathcal{A}'\equiv\{A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\ ;\ [A,B]\equiv AB-BA=0,\quad\forall B\in\mathcal{A}\}.$$

この $\mathcal{A}'$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分代数になるが，$\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$ のときは * 部分代数にもなっている．さらに，$\mathcal{A}''\equiv(\mathcal{A}')'$ は $\mathcal{A}$ の**双可換子代数** (bicommutant) と呼ばれ，常に $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}''$ である．同様にして，$\mathcal{A}'''$ $(=\mathcal{A}^{(3)}$ と書く），$\mathcal{A}^{(4)},\cdots$ を定めると，$\mathcal{A}'=\mathcal{A}^{(3)}=\mathcal{A}^{(5)}=\cdots$，$\mathcal{A}''=\mathcal{A}^{(4)}=\cdots$ が容易にわかる．

［定義 1.4］ $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の * 部分代数 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}''=\mathcal{A}$ を満たすとき，$\mathcal{A}$ を **von Neumann 代数**（**v.N. 代数**と略記）という．

v.N. 代数は C* 代数であり，その中でとりわけ重要なものである．

1.8 スペクトルとリゾルベント

この節では，代数 $\mathcal{A}$ の元 A のスペクトルおよびリゾルベントの性質を調べ，重要な Gelfand–Mazur の定理を証明しよう．

$\mathcal{A}$ の元 A に対して，$A^{-1}A=AA^{-1}=I$ となる元 $A^{-1}\in\mathcal{A}$ が存在するとき，A は**可逆**または**正則**であるといい，A^{-1} を A の**逆元**という．$\mathcal{A}$ の可逆な元の全体を $\mathcal{R}$ で表し，可逆でない元（そのような元を**特異**であるという）の全体を $\mathcal{S}$ で表す．

任意の $A,B\in\mathcal{R}$ に対して，$(A^{-1})^{-1}=A$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(A^*)^{-1}=(A^*)^{-1}$（$\mathcal{A}$ が * 代数のとき）が容易にわかり，さらに，

〈定理 1.10〉 $\mathscr{A}$ が Banach 代数のとき，次が成立する：(1) $A\in\mathscr{A}$ が $\|I-A\|<1$ ならば，$A\in\mathscr{R}$ かつ $A^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$；(2) $\mathscr{R}$ は開集合（ゆえに $\mathscr{S}$ は閉集合）；(3) 写像 $A\in\mathscr{R}\mapsto A^{-1}\in\mathscr{R}$ は連続.

証明 (1)：$\|(I-A)^k\|\leqq\|I-A\|^k$ より，$B_n=\sum_{k=0}^{n}(I-A)^k$ とおくと，$\{B_n\}$ は Cauchy 列となる．よって，$\mathscr{A}$ は Banach 代数であるから，$B\in\mathscr{A}$ が存在して $\|B_n-B\|\to 0$，$B=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$．このとき，$AB=BA=I$ が簡単にわかり，$A^{-1}=B$.

(2)：任意の $A_0\in\mathscr{R}$ に対して，$A\in\mathscr{A}$ を $\|A-A_0\|<1/\|A_0^{-1}\|$ とすると，$\|A_0^{-1}A-I\|<1$．したがって，(1) より $A_0^{-1}A\in\mathscr{R}$．$B=A_0^{-1}A$ とおくと，$A=A_0B$ で $A\in\mathscr{R}$．ゆえに $\mathscr{R}$ は開集合で $\mathscr{S}=\mathscr{A}\backslash\mathscr{R}$ は閉集合.

(3)：$\{A_n\}\subset\mathscr{R}$，$\mathscr{A}\in\mathscr{R}$ で $\|A_n-A\|\to 0$ とする．このとき，$\|A_n-A\|<1/\|A^{-1}\|$ としてよい．$\|A^{-1}A_n-I\|\leqq\|A^{-1}\|\|A_n-A\|\to 0$ より，$\|A_n^{-1}-A^{-1}\|\leqq\|(A^{-1}A_n)^{-1}-I\|\|A^{-1}\|\leqq\|A^{-1}\|\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}A_n-I\|^k\to 0$ がわかる．▌

元 $A\in\mathscr{A}$ に対して，A の**リゾルベント集合** $\mathrm{Re}(A)$ と**スペクトル集合** $\mathrm{Sp}(A)$ は

$$\mathrm{Re}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,A-\lambda I\in\mathscr{R}\},$$
$$\mathrm{Sp}(A)\equiv\boldsymbol{C}\backslash\mathrm{Re}(A)$$

で定義される．また，$\mathrm{Re}(A)$ の元を A のリゾルベント，$\mathrm{Sp}(A)$ の元を A のスペクトルという.

〈定理 1.10〉を使って，次の定理が容易に示せる.

〈定理 1.11〉 Banach 代数 $\mathscr{A}$ の任意の元 A に対して，(1) $\mathrm{Re}(A)$ は開集合で $\mathrm{Sp}(A)$ は閉集合；(2) $A(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$ $(\lambda\in\mathrm{Re}(A))$ とおくと，$A(\lambda)-A(\mu)=(\mu-\lambda)A(\lambda)A(\mu)$ $(\forall\lambda,\mu\in\mathrm{Re}(A))$；(3) $\mathscr{A}$ に値をとる函数 $A(\lambda)$ は $\mathrm{Re}(A)$ で解析的である.

問 この定理を証明せよ.

〈補題 1.12〉 (1) ノルム代数 $\mathscr{A}$ の任意の元 A に対して，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ が存在して $\inf\{\|A^n\|^{1/n}\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ に等しい.

(2) $\mathscr{A}$ が C* 代数で A が正規ならば，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}=\|A\|$.

証明 （1）：任意の $m\in\boldsymbol{N}$ に対して，$n=mj+k$ $(0\leqq k<m)$ とおくと $\|A^n\|^{1/n}\leqq\|A^m\|^{j/n}\|A^k\|^{1/n}$. よって $\limsup_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}\leqq\|A^m\|^{1/m}$. ゆえに $\limsup_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}\leqq\inf_m\|A^m\|^{1/m}$ となるから，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ が存在して $\inf_n\|A^n\|^{1/n}$ に等しい．

（2）：$\mathcal{A}$ が C* 代数で $A^*A=AA^*$ であるから，

$$\|A^{2^n}\|^2=\|(A^{2^n})^*A^{2^n}\|=\|(A^*A)^{2^n}\|=\|(A^*A)^{2^{n-1}}\|^2=\cdots=\|A^*A\|^{2^n}=\|A\|^{2^{n+1}}.$$

ゆえに $\|A^{2^n}\|^{1/2^n}=\|A\|$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ となるから，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}=\|A\|$. ▮

この $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ を A の**スペクトル半径**といい，$\mathrm{r}(A)$ で表す．定義から当然，$0\leqq\mathrm{r}(A)\leqq\|A\|$ である．

〈**補題 1.13**〉 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の元 A と $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，$|\lambda|>\mathrm{r}(A)$ のとき，$(\lambda I-A)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(A/\lambda)^n$ で $\lambda\in\mathrm{Re}(A)$．

証明 $\lim_{n\to\infty}\|(A/\lambda)^n\|^{1/n}=\mathrm{r}(A)/|\lambda|<1$ より，級数 $\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(A/\lambda)^n$ はある $B\in\mathcal{A}$ にノルム収束する．このとき，$AB=BA=\lambda B-I$ が簡単にわかり，$B=(\lambda I-A)^{-1}$ となる．▮

〈**定理 1.14**〉 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の任意の元 A に対して，（1）$\mathrm{Sp}(A)\neq\emptyset$；（2）$\mathrm{r}(A)=\sup\{|\lambda|\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$．

証明 （1）：$\mathrm{Sp}(A)=\emptyset$ とすると，〈定理 1.11〉より，任意の $\varphi\in\mathcal{A}^*$（$\mathcal{A}$ 上の有界線形汎函数）に対して $\varphi(A(\lambda))=\varphi((\lambda I-A)^{-1})$ は整函数となる．ところで，$\|A(\lambda)\|\to0$ $(|\lambda|\to\infty)$ より，$\varphi(A(\lambda))$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で有界である．よって Liouville の定理より，$\varphi(A(\lambda))$ は定数となり $\varphi(A(\lambda))=0$ $(\forall\lambda\in\boldsymbol{C},\ \forall\varphi\in\mathcal{A}^*)$．したがって $A(\lambda)=0$ となり不合理．ゆえに $\mathrm{Sp}(A)\neq\emptyset$．

（2）：〈補題 1.13〉より，$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ ならば $\mathrm{r}(A)\geqq|\lambda|$．よって $\mathrm{r}(A)\geqq\sup\{|\lambda|\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$ $(=r_0$ とおく$)$．いま，$\mathrm{r}(A)>r_0$ として，$\mathrm{r}(A)>a>r_0$ となる $a>0$ をとる．任意の $\varphi\in\mathcal{A}^*$ に対して，〈補題 1.13〉より，$|\lambda|>\mathrm{r}(A)$ のとき $\varphi(A(\lambda))=\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(A^n)/\lambda^n$．この左辺は $|\lambda|>r_0$ で解析的だから，右辺の Laurant 展開は $\lambda=a$ で収束する．よって $\{\varphi(A^n/a^n)\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ は有界である．Banach-Steinhaus の定理より，$c>0$ が存在して $\|A^n/a^n\|\leqq c$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．したがって $\inf_n\|A^n\|^{1/n}\leqq\lim_{n\to\infty}c^{1/n}a=a$ となり，$\mathrm{r}(A)\leqq a$．これは矛盾．▮

〈**定理 1.15**〉 **Gelfand-Mazur の定理**：$\mathcal{A}$ が Banach 代数のとき，$\mathcal{R}=\mathcal{A}\backslash\{0\}$（i.e.，$\mathcal{A}$ が体）ならば $\mathcal{A}=\boldsymbol{C}I$ である．

証明 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，〈定理 1.14〉の（1）より，$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ が存在して A

$-\lambda I \in \mathcal{S}$. ゆえに，仮定より $A-\lambda I=0$. したがって $\mathcal{A}=CI$. ▮

1.9 位相群

この節では，後章で必要になる位相群について概説する．群Gが位相空間であり，写像 $(g,h)\in G\times G\mapsto gh\in G$ および $g\in G\mapsto g^{-1}\in G$ が連続であるとき，Gを**位相群**という．位相群Gの単位元eがコンパクト近傍をもつとき，Gを**局所コンパクト群**という．

Gを局所コンパクト群とし，Gの Borel 集合体を $\mathcal{B}(G)$ で表す．$\mathcal{B}(G)$ 上で定義された正則な Borel 測度λが次の3条件を満たすとき，λをGの**左 Haar 測度**という：(i) 任意のコンパクト集合 $K\subset G$ に対して $\lambda(K)<\infty$；(ii) 任意の開集合 $U\subset G$ に対して $\lambda(U)>0$；(iii) 任意の $F\in\mathcal{B}(G)$，$g\in G$ に対して $\lambda(gF)=\lambda(F)$. 左 Haar 測度λがさらに $\lambda(Fg)=\lambda(F)$ $(\forall F\in\mathcal{B}(G),\ \forall g\in G)$ を満たすとき，λを**両側 Haar 測度**または単に **Haar 測度**という．左 Haar 測度の存在に関しては，

1° すべての局所コンパクト群Gは左 Haar 測度λをもつ．さらに，λは正の定数倍を除いて一意である．

2° 局所コンパクト可換群，コンパクト群，離散群は Haar 測度をもつ．

3° λを左 Haar 測度とすると，$E,F\in\mathcal{B}(G)$，$\lambda(E)>0$，$\lambda(F)>0$ ならば，$g\in G$ が存在して $\lambda(gE\cap F)>0$.

これより，G 上の Borel 可測函数fが任意の $g\in G$ に対して $f(g^{-1}h)=f(h)$ a.e. を満たすならば，fは a.e. で定数になることがわかる．

さて，局所コンパクト群Gの左 Haar 測度λをdg（または，dhなど）で表し，それに関して Banach 空間 $L^p(G)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ をつくる．

4° 任意の $f\in L^p(G)$ $(1\leqq p<\infty)$ に対して，$\int_G |f(g^{-1}h)-f(h)|^p dh\to 0$ $(g\to e)$.

$f_1, f_2\in L^1(G)$ に対して，**畳み込み**（convolution）$f_1 * f_2$ を $(f_1 * f_2)(g)=\int_G f_1(h)f_2(h^{-1}g)dh$ で定めると，

5° 任意の $f_1,f_2,f_3\in L^1(G)$ に対して，$f_1 * f_2\in L^1(G)$, $\|f_1 * f_2\|_1\leqq\|f_1\|_1\|f_2\|_1$, $(f_1 * f_2) * f_3=f_1 * (f_2 * f_3)$.

これより $L^1(G)$ は積 $*$ に関して Banach 代数になる．

問　(1)『$L^1(G)$ が可換 $\Longleftrightarrow G$ が可換』を示せ.

(2)『$L^1(G)$ が単位元をもつ $\Longleftrightarrow G$ が離散群』を示せ.

以下，G が局所コンパクト可換群の場合を考えよう．$\boldsymbol{T}\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\,|z|=1\}=\{e^{i\theta}\,;\,\theta\in(-\pi,\pi]\}$ は複素数の積に関してコンパクト可換群になる．連続函数 $\gamma: G\to\boldsymbol{T}$ が $\gamma(g_1g_2)=\gamma(g_1)\gamma(g_2)$ $(\forall g_1,g_2\in G)$ を満たすとき，γ を G の**指標** (character) という．G の指標全体を $\hat{G}$ で表す．$\gamma_1,\gamma_2\in\hat{G}$ に対して積 $\gamma_1\gamma_2\in\hat{G}$ を $(\gamma_1\gamma_2)(g)=\gamma_1(g)\gamma_2(g)$ $(g\in G)$ で定めることにより，$\hat{G}$ は可換群になる．さらに，$\hat{G}$ 上にコンパクト収束位相を定義すると，$\hat{G}$ は局所コンパクト可換群になる．この $\hat{G}$ を G の**双対群**という．

$g\in G,\gamma\in\hat{G}$ に対して，$\gamma(g)=\langle g,\gamma\rangle$ と書く．$M(G)$ を G 上の正則な複素数値 Borel 測度の全体とすると，自然に $L^1(G)\subset M(G)=C_0(G)^*$ とみなせる (1.6 節 II 参照)．$\mu\in M(G)$ の **Fourier 変換** $\hat{\mu}$ を $\hat{\mu}(\gamma)=\int_G\overline{\langle g,\gamma\rangle}d\mu(g)$ で，$f\in L^1(G)$ の **Fourier 変換** $\hat{f}$ を $\hat{f}(\gamma)=\int_G\overline{\langle g,\gamma\rangle}f(g)dg$ で与える．この $\hat{\mu}$ は $\hat{G}$ 上で有界一様連続であり，また $\hat{f}\in C_0(\hat{G})$ (**Riemann-Lebesgue の補題**) である．

6°　$f\in L^1(G),\hat{f}=0$ ならば $f=0$ (Fourier 変換の単射性)．

7°　$\{\hat{f}\,;\,f\in L^1(G)\}$ は 1.6 節 1° の条件 (i), (ii), (iii′) を満たし，したがって $\{\hat{f}\,;\,f\in L^1(G)\}$ は $C_0(\hat{G})$ で稠密である．

$\mu\in M(G)$ と $f\in L^1(G)$ の畳み込みを $(\mu*f)(g)=\int_G f(h^{-1}g)d\mu(h)$ で定めると，

8°　$(\mu*f)^\wedge=\hat{\mu}\hat{f}$ $(\forall\mu\in M(G),\ \forall f\in L^1(G))$．　特に $(f_1*f_2)^\wedge=\hat{f}_1\hat{f}_2$ $(\forall f_1,f_2\in L^1(G))$．

$\hat{G}$ の Haar 測度 $d\gamma$ (の定数倍) を適当にとって，$L^p(\hat{G})$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ をつくると，

9°　**Plancherel の定理**：任意の $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ に対して，$\hat{f}\in L^2(\hat{G})$ で $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$．

これより，$f\in L^1(G)\cap L^2(G)\mapsto\hat{f}\in L^2(\hat{G})$ は等距離作用素 $\mathcal{F}: L^2(G)\to L^2(\hat{G})$ に拡張されて，さらに $\mathcal{F}$ は全射 (i.e., $\mathcal{F}$ はユニタリー作用素) になる

ことがわかる．$f \in L^1(\hat{G})$ の逆 Fourier 変換 $\check{f}$ を $\check{f}(g)=\int_{\hat{G}}\langle g,\gamma\rangle f(\gamma)d\gamma$ で与える．$f \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ ならば，$\check{f} \in L^2(G)$ で $\mathcal{F}(\check{f})=f$ が成立する．

10° Pontrjagin の双対定理： 自然な写像 $g \in G \mapsto \tilde{g} \in \hat{\hat{G}}$ $(\tilde{g}(\gamma)=\langle g,\gamma\rangle$, $\gamma \in \hat{G})$ により，G は $\hat{\hat{G}}$ に位相群として同型である．

問 『G がコンパクト群 $\Longleftrightarrow \hat{G}$ が離散群』を示せ．

$f \in L^1(G)$ に対して $Z(f) \equiv \{\gamma \in \hat{G}\,;\, \hat{f}(\gamma)=0\}$ とし，$\mathcal{J} \subset L^1(G)$ に対して $Z(\mathcal{J}) \equiv \cap\{Z(f)\,;\, f \in \mathcal{J}\}$ と定めると，

11° Tauber 型定理： $\mathcal{J}$ が $L^1(G)$ の閉イデアル (i.e., $\mathcal{J}$ は閉部分空間で任意の $f_1 \in L^1(G), f_2 \in \mathcal{J}$ に対して $f_1 * f_2 \in \mathcal{J}$) ならば，$Z(\mathcal{J})$ が完全集合を含まないとき，$\mathcal{J}=\{f \in L^1(G)\,;\, Z(f) \supset Z(\mathcal{J})\}$．

最後に，$G=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{T}$ の場合の双対群，Haar 測度，Fourier 変換を記しておこう．

（1） $\boldsymbol{R}$ は加法に関して局所コンパクト可換群で，$\langle s,t\rangle=e^{ist}$ $(s,t \in \boldsymbol{R})$ により $\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}$．$\boldsymbol{R}$ の Haar 測度として $(2\pi)^{-1/2}dt$ (dt は Lebesgue 測度) をとると，$f \in L^1(\boldsymbol{R})$ の Fourier 変換は $\hat{f}(s)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}f(t)dt$，逆 Fourier 変換は $\check{f}(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}f(s)ds$．

（2） $\boldsymbol{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ は加法に関して離散群で，$\langle e^{i\theta}, n\rangle=e^{in\theta}$ $(\theta \in (-\pi,\pi], n \in \boldsymbol{Z})$ により $\hat{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{Z}$．$\boldsymbol{T}$ の Haar 測度として $(2\pi)^{-1}d\theta$ をとると，$f \in L^1(\boldsymbol{T})$ の Fourier 変換は $\hat{f}(n)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}f(e^{i\theta})d\theta$．　$x=\{x_n\} \in l^1(\boldsymbol{Z})$ の逆 Fourier 変換は $\check{x}(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\theta}$．なお，$\{e^{in\theta}\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$ は $L^2(\boldsymbol{T})$ の CONS となる．

第2章　$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{C}(\mathcal{H}), \boldsymbol{S}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ と RKHS

Hilbert空間 $\mathcal{H}$ 上の個々の作用素に関する基本性質については，第1章で述べた．この章では，Hilbert空間において有効なvon Neumann–Schatten積を主な道具立てとして，作用素論を展開する．各節の表題が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{C}(\mathcal{H}), \boldsymbol{S}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ の記号で簡潔に書かれているが，これらはそれぞれ有界作用素，完全連続作用素，Schmidt作用素，トレースクラス作用素の全体のつくる空間を表し，すべてBanach $*$ 代数である．また，これらの作用素の空間の関係について，数列空間と対比してわかりやすく説明する．L^2 空間上の積分作用素をSchmidt作用素として特徴づけ，その議論を確率過程の展開定理に応用する．さらに，再生核Hilbert空間（RKHS）についても説明し，最後にBrown運動と関連する興味ある核函数 $K(s,t)=s\wedge t$ を取りあげる．

2.1　$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$

$\mathcal{H}$ の任意の2つの元 x, y に対して，作用素 $x\otimes\bar{y}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を $(x\otimes\bar{y})z=\langle y, z\rangle x$ $(z\in\mathcal{H})$ で定める．$\operatorname{ran} x\otimes\bar{y}=\{\lambda x\,;\,\lambda\in\boldsymbol{C}\}$ は1次元部分空間（ただし，x または y が0ときは $\{0\}$）である．この作用素 $x\otimes\bar{y}$ を x と y の **Schatten積**（または **von Neumann-Schatten積**）という．これを，Diracのブラ・ケット記号を使って，$x\otimes\bar{y}=|x\rangle\langle y|$ と表すこともある．次の補題は，簡単な計算で示せる．

〈補題 2.1〉（1）　$\|x\otimes\bar{y}\|=\|x\|\|y\|$.

（2）　$(x\otimes\bar{y})^*=y\otimes\bar{x}$.

（3）　$(\lambda x)\otimes(\overline{\mu y})=\lambda\bar{\mu}x\otimes\bar{y}$,　$\forall\lambda,\mu\in\boldsymbol{C}$.

（4）　$(x+y)\otimes\bar{z}=x\otimes\bar{z}+y\otimes\bar{z}$,　$x\otimes\overline{(y+z)}=x\otimes\bar{y}+x\otimes\bar{z}$.

（5）　$(x\otimes\bar{y})(u\otimes\bar{v})=\langle y, u\rangle x\otimes\bar{v}$.

（6）　$A(x\otimes\bar{y})=Ax\otimes\bar{y}$,　$(x\otimes\bar{y})A=x\otimes\overline{A^*y}$,　$\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$.

$\{x_j\,;\,j\in J\}, \{y_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{H}$ を2つの ONS とし，$\{\lambda_j\,;\,j\in J\}\subset\boldsymbol{C}$ を有界とする．有限な各 $K\subset J$ に対して $A_K=\sum_{j\in K}\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ とおくと，ネット $\{A_K\}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ はある $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に強収束（i.e., $\|A_K x-Ax\|\to 0, \forall x\in\mathcal{H}$）する．この A を $A=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j\otimes\bar{y}_j$ で表す．この A に関して，次が成立する．

〈**補題 2.2**〉（1）$\|A\|=\sup\{|\lambda_j|\,;\,j\in J\}$.

（2）$A^*=\sum_{j\in J}\bar{\lambda}_j y_j\otimes\bar{x}_j$,　$A^*A=\sum_{j\in J}|\lambda_j|^2 y_j\otimes\bar{y}_j$,　$|A|=\sum_{j\in J}|\lambda_j|y_j\otimes\bar{y}_j$.

（3）$A^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在することは，$\{x_j\}, \{y_j\}$ がともに CONS でかつ $c>0$ が存在して $|\lambda_j|\geqq c$（$\forall j\in J$）と同値である．このとき，

$$A^{-1}=\sum_{j\in J}\lambda_j^{-1}y_j\otimes\bar{x}_j.$$

証明　（1）と（2）は容易なので問題としておく．

（3）: $A^{-1}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在したとする．$\langle y_j, z\rangle=0$（$\forall j\in J$）ならば，$Az=\sum_{j\in J}\lambda_j\langle y_j, z\rangle x_j=0$ より $z=0$. よって $\{y_j\}$ は CONS. $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ だから，（2）より $\{x_j\}$ も CONS. また，$\|x\|=\|A^{-1}Ax\|\leqq\|A^{-1}\|\|Ax\|$（$\forall x\in\mathcal{H}$）より，$|\lambda_j|=\|Ay_j\|\geqq 1/\|A^{-1}\|$（$\forall j\in J$）．逆に，$\{x_j\}, \{y_j\}$ が CONS で $|\lambda_j|\geqq c>0$（$\forall j\in J$）とすると，$B=\sum_{j\in J}\lambda_j^{-1}y_j\otimes\bar{x}_j\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して $AB=\sum_{j\in J}x_j\otimes\bar{x}_j=I$ かつ $BA=\sum_{j\in J}y_j\otimes\bar{y}_j=I$. ▌

問　この補題の（1），（2）を示せ．

〈補題 2.1〉と〈補題 2.2〉より，次の定理は容易に示せる．

〈**定理 2.3**〉　$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，次が成立する．

（1）A が射影作用素 $\Longleftrightarrow$ ONS $\{x_j\}$ が存在して，$A=\sum_j x_j\otimes\bar{x}_j$.

（2）A がユニタリー作用素 $\Longleftrightarrow$ CONS $\{x_j\}, \{y_j\}$ が存在して，$A=\sum_j x_j\otimes\bar{y}_j$.

（3）A が等距離作用素 $\Longleftrightarrow$ ONS $\{x_j\}$ と CONS $\{y_j\}$ が存在して，$A=\sum_j x_j\otimes\bar{y}_j$.

（4）A が半等距離作用素 $\Longleftrightarrow$ ONS $\{x_j\}, \{y_j\}$ が存在して，$A=\sum_j x_j\otimes\bar{y}_j$.

問　この定理を証明せよ．

［**定義 2.1**］ $\dim(\operatorname{ran} A)<\infty$ である作用素 $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ を**有限階作用素**といい，この作用素の全体を $\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$ で表す．

$A\in\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$ であることは，$\{\lambda_k\}_{k=1}^n\subset\boldsymbol{R}$ と ONS $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_k\}_{k=1}^n$ が存在して $A=\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k\otimes\bar{y}_k$ と表せることと同値である（2.2節〈系 2.7〉参照）．明らかに，$\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の両側イデアルである．

2.2 $C(\mathscr{H})$

［**定義 2.2**］ $\mathscr{H},\mathscr{K}$ を2つの Hilbert 空間とするとき，作用素 $A:\mathscr{H}\to\mathscr{K}$ が**完全連続**（以下，CC と書く）または**コンパクト**であるとは，任意の有界集合 $\mathscr{L}\subset\mathscr{H}$ の A による像 $A\mathscr{L}\equiv\{Ax\,;\,x\in\mathscr{L}\}$ が全有界（i.e.，相対コンパクト）のときをいう．この CC 作用素の全体を $\boldsymbol{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ で表す．$\mathscr{H}=\mathscr{K}$ のときは，これを $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ と書く．

以下，CC 作用素の基本性質を述べる．

〈**補題 2.4**〉（1） $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ が CC であることは，『$x_n\to x$（弱収束）$\Rightarrow Ax_n\to Ax$（強収束）』と同値である．

（2） $\{A_n\}\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$，$A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ で $\|A_n-A\|\to 0$ ならば，$A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$．

（3） $\boldsymbol{C}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ の閉部分空間であり，したがってそれ自身 Banach 空間である．

（4） $\boldsymbol{F}(\mathscr{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$．

（5） $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の両側イデアルである．

（6） $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ に対して，$A, A^*, |A|, |A^*|$ のいずれかひとつが CC ならば，他もすべて CC である．

証明 （1）：A が CC のとき，$x_n\to x$（弱収束）ならば，$\{x_n\}$ が有界だから，$\{Ax_n\}$ は全有界である．よって $\{Ax_n\}$ の任意の部分列は強収束する部分列をもつ．したがって，$\|Ax_n-Ax\|\to 0$ を示すには，部分列 $\{Ax_{n_k}\}$ と $Z\in\mathscr{K}$ に対して，$\|Ax_{n_k}-Z\|\to 0$ ならば $Z=Ax$ を証明すればよい．1.3節1°より $A^*\in\boldsymbol{B}(\mathscr{K},\mathscr{H})$ が存在して $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ $(\forall x\in\mathscr{H},\forall y\in\mathscr{K})$．$\langle z,y\rangle=\lim_k\langle Ax_{n_k},y\rangle=\lim_k\langle x_{n_k},A^*y\rangle=\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle$ $(\forall y\in$

$\mathscr{H}$) より $z=Ax$ となり，$\|Ax_n-Ax\|\to 0$ を得る．逆は，$\mathscr{H}$ の有界集合が弱点列コンパクト（1.5 節 10° 参照）であることを使って，容易に示せる．▌

問　（1）　この補題の（1）を用いて，（2）～（5）を証明せよ．

（2）　極分解定理と（5）を用いて，（6）を証明せよ．

〈補題 2.5〉　（1）　$A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ ならば，$x\in\mathscr{H}, \|x\|=1$ が存在して $|\langle x, Ax\rangle| =\sup\{|\langle y, Ay\rangle|\ ;\ y\in\mathscr{H}, \|y\|=1\}$．さらに，$A=A^*$ ならば，$|\langle x, Ax\rangle|=\|A\|$ で，この x は A の固有ベクトル（固有値は $\|A\|$ または $-\|A\|$）である．

（2）　$A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ が固有値 λ ($\neq 0$) をもつとき，それに対する固有空間 $\mathscr{H}_\lambda$ は有限次元である．

（3）　自己共役な $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

証明　（1）：$a=\sup\{|\langle y, Ay\rangle|\ ;\ \|y\|=1\}$ とおく．$\{y_n\}\subset\mathscr{H}$，$\|y_n\|=1$ が存在して $|\langle y_n, Ay_n\rangle|\to a$．$A$ が CC であるから，ある $x\in\mathscr{H}, \|x\|\leqq 1$ が存在して $y_n\to x$（弱収束）かつ $Ay_n\to Ax$（強収束）としてよい．このとき，

$$|\langle y_n, Ay_n\rangle-\langle x, Ax\rangle|\leqq|\langle y_n, Ay_n-Ax\rangle|+|\langle y_n-x, Ax\rangle|\to 0.$$

よって $|\langle x, Ax\rangle|=a$．この x は $\|x\|=1$ にとれる．$A=A^*$ ならば，$|\langle x, Ax\rangle|=a=\|A\|$．$\lambda=\|A\|^2/\langle x, Ax\rangle$ とおくと，

$$\|Ax-\lambda x\|^2=\|Ax\|^2-2\lambda\langle x, Ax\rangle+\lambda^2\leqq\|A\|^2-2\|A\|^2+\|A\|^2=0$$

となるから，$Ax=\lambda x$．▌

問　この補題の（2），（3）を証明せよ．

〈定理 2.6〉　固有値展開定理：任意の自己共役な $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ に対して，有限個または 0 に収束する可算個の実数列 $\{\lambda_n\}$ と ONS$\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ が存在して $A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$．逆に，このように表される A は自己共役な CC 作用素である．

証明　$A^*=A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ とする．$A\neq 0$ とすると，前補題の（1）より A は固有値 λ ($=\|A\|$ または $-\|A\|$) をもつ．前補題の（2）より λ に対する固有空間は有限次元だから，その CONS$\{x_1,\cdots,x_{n_1}\}$ をとり，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n_1}=\lambda$ とする．$\mathscr{H}_1=\{x_1,\cdots,x_{n_1}\}^\perp$ とおくと，$A\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}_1$ となり，$A_1=A\restriction\mathscr{H}_1$ は $\mathscr{H}_1$ 上の自己共役な CC 作用素である．$A_1\neq 0$ とすると，A に対してと同様にして，A_1 の固有値 $\lambda_{n_1+1}=\cdots=\lambda_{n_2}$ と固有ベクトル x_{n_1+1},

$\cdots, x_{n_2}$ をとる．$\mathscr{H}_2=\{x_1, \cdots, x_{n_2}\}^\perp$ とおいて，以下同じ操作をくり返す．これが無限に続くならば，$|\lambda_1|\geqq|\lambda_2|\geqq\cdots$ であり，$\{A(\lambda_n{}^{-1}x_n)\}=\{x_n\}$ は全有界でないから，$\{\lambda_n{}^{-1}x_n\}$ は有界でない．よって $\lambda_n\to 0$．さて $\bigcap_n \mathscr{H}_n=\ker A$ であり，$\{x_n\}$ は $\overline{\mathrm{ran}}\,A$ の CONS である．$B=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ とおくと，$(A-B)x_n=(\lambda_n-\lambda_n)x_n=0$ $(\forall n)$ より，$A=B$ を得る．

逆に，$A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ $(\lambda_n\in\boldsymbol{R}, \lambda_n\to 0)$ と表されるとき，〈補題 2.2〉の（2）より $A=A^*$ である．$A_n=\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k$ は CC であり，$\|A_n-A\|=\sup\{|\lambda_k|\,;\,k>n\}\to 0$．よって〈補題 2.4〉の（3）より，$A$ は CC である．▌

極分解定理を使うと，この定理より次の系を得る．

〈系 2.7〉 任意の $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ に対して，$0\leqq\lambda_n\downarrow 0$ となる実数列 $\{\lambda_n\}$ と ONS $\{x_n\}, \{y_n\}$ が存在して $A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{y}_n$．ここで，$\{\lambda_n\}$ は $|A|$ の固有値からなり一意に定まる．

〈定理 2.8〉 min-max 原理： $A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ が正のとき，$A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ $(\lambda_n\downarrow 0)$ と表されるが，A の固有値 λ_n は次の min-max 形式で求められる：

$$\lambda_n=\min\{\max\{\langle x, Ax\rangle\,;\,x\in\mathscr{K}^\perp, \|x\|=1\}\,;\,\dim\mathscr{K}=n-1\}.$$

証明 $\mathscr{K}_n$ を $\{x_1, \cdots, x_n\}$ で張られる部分空間とする．$x\in\mathscr{K}_{n-1}{}^\perp$，$\|x\|=1$ のとき，$\langle x, Ax\rangle=\sum_{k\geqq n}\lambda_k|\langle x_k, x\rangle|^2\leqq\lambda_n\|x\|^2=\lambda_n$ であり，かつ $\langle x_n, Ax_n\rangle=\lambda_n$．また，$\dim\mathscr{K}=n-1$ のとき，$y\in\mathscr{K}_n\cap\mathscr{K}^\perp$，$\|y\|=1$ が存在するが，この y に対して，

$$\langle y, Ay\rangle=\sum_{k=1}^n \lambda_k|\langle x_k, y\rangle|^2\geqq\lambda_n\sum_{k=1}^n|\langle x_k, y\rangle|^2=\lambda_n.$$

よって結論の式を得る．▌

$A\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ が自己共役なとき，〈定理 2.6〉より $\mathrm{Sp}(A)$ は高々可算集合であり，0 を除いてすべて点スペクトルである．したがって，$\mathrm{Sp}(A)=\{\zeta_k\}$ とすると，A のスペクトル分解は $A=\sum_k \zeta_k P_k$ と書ける．ここで，P_k は固有値 ζ_k に対する固有空間への射影作用素である．特に，A の 0 以外の固有値がすべて単純（i.e., 固有空間が 1 次元）なとき，固有値展開 $A=\sum_n \lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ が A のスペクトル分解になる．

〈定理 2.9〉 自己共役な $A, B\in\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ に対して，$AB=BA$ であることは，ONS $\{x_j\}$ が存在して $A=\sum_j \lambda_j x_j\otimes\bar{x}_j$，$B=\sum_j \mu_j x_j\otimes\bar{x}_j$ となることと同値である．

証明 $AB=BA$ として，A のスペクトル分解を $A=\sum_k \zeta_k P_k$ とする．$\zeta_k BP_k = BAP_k = ABP_k$ より，$\operatorname{ran} BP_k \subset \operatorname{ran} P_k$．よって $P_i BP_k = \delta_{ik} BP_k$．ただし $\delta_{ik}=1$ $(i=k)$，$0 (i \neq k)$．したがって $P_k B = P_k B(\sum_i P_i) = \sum_i P_k BP_i = BP_k$．各 k に対して，$\mathscr{H}_k = \operatorname{ran} P_k$ とおくと，$B_k = B \restriction \mathscr{H}_k$ は $\mathscr{H}_k$ 上の自己共役な CC 作用素である．よって B_k の固有ベクトルからなる $\mathscr{H}_k$ の CONS がとれる．これらの CONS を集めた $\mathscr{H}$ の CONS を $\{x_j\}$ とすると，$A=\sum_j \lambda_j x_j \otimes \bar{x}_j$，$B=\sum_j \mu_j x_j \otimes \bar{x}_j$ と書ける．逆は容易である．▮

CC 作用素に関して，さらに次の結果がある．

1° 自己共役な A がある $n \in \boldsymbol{N}$ で $A^n \in \boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ ならば，$A \in \boldsymbol{C}(\mathscr{H})$．

2° $A \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が正規な CC 作用素であることは，$\lambda_n \to 0$ となる複素数列 $\{\lambda_n\}$ と ONS $\{x_n\}$ が存在して $A=\sum_n \lambda_n x_n \otimes \bar{x}_n$ となることと同値である．

問 命題 1°, 2° を証明せよ．

2.3 $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$

$A \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ と任意の 2 つの CONS $\{x_j\}$, $\{y_j\} \subset \mathscr{H}$ に対して，次の 3 つの無限級数：

$$\sum_j \|Ax_j\|^2, \quad \sum_j \|A^* y_j\|^2, \quad \sum_{i,j} |\langle y_i, Ax_j \rangle|^2$$

のいずれかひとつが収束すれば他も収束し，これらの和は一致する．実際，Riesz-Fischer の等式より，$\|Ax_j\|^2 = \sum_i |\langle y_i, Ax_j \rangle|^2$．したがって

$$\sum_j \|Ax_j\|^2 = \sum_{i,j} |\langle y_i, Ax_j \rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle x_j, A^* y_i \rangle|^2 = \sum_i \|A^* y_i\|^2.$$

［**定義 2.3**］ CONS $\{x_j\} \subset \mathscr{H}$ に対して，$\sum_j \|Ax_j\|^2 < \infty$ となる $A \in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ を **Schmidt 作用素**または **Hilbert-Schmidt 作用素**といい，この作用素の全体を $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ で表す．

$\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ が $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の部分空間になることは，容易にわかる．任意の CONS $\{x_j\}$ と $A \in \boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ に対して，$\|A\|_2 = (\sum_j \|Ax_j\|^2)^{1/2}$ とおくと，$\|\cdot\|_2$ は $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ 上のノルム（**Schmidt ノルム**または **Hilbert-Schmidt ノルム**という）となり，これにより $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ はノルム空間になる．

〈補題 2.10〉 （1） $\|x\otimes\bar{y}\|_2=\|x\|\|y\|$, $\forall x, y\in\mathcal{H}$.

（2） $A\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$, $X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ ならば, $\|A\|\leqq\|A\|_2$, $\|A^*\|_2=\|A\|_2$, $\|XA\|_2\leqq\|X\|\|A\|_2$, $\|AX\|_2\leqq\|X\|\|A\|_2$.

（3） $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである.

（4） $A\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ ならば, $|A|\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ で $\||A|\|_2=\|A\|_2$.

証明 （1）は $y/\|y\|$ を含む CONS をとって計算すればよい. （2）は簡単な計算からわかる. （3）は（2）より明らか. （4）は極分解定理と（2）より示せる. ▌

問 （1） $\|\cdot\|_2$ が $S(\mathcal{H})$ 上のノルムであることを示せ.

（2） この補題の証明を完成させよ.

〈補題 2.11〉 任意の CONS $\{x_j\}$ と $A, B\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ に対して, $\sum_j\langle Ax_j, Bx_j\rangle$ は絶対収束し, この和は CONS $\{x_j\}$ のとり方によらない.

証明 $|\langle Ax_j, Bx_j\rangle|\leqq(\|Ax_j\|^2+\|Bx_j\|^2)/2$ より, $\sum_j|\langle Ax_j, Bx_j\rangle|\leqq(\|A\|_2+\|B\|_2)/2<\infty$. よって $\sum_j\langle Ax_j, Bx_j\rangle$ は絶対収束する. また, 偏極化を使うと,

$$\sum_j\langle Ax_j, Bx_j\rangle=\frac{1}{4}(\|A+B\|_2{}^2-\|A-B\|_2{}^2+i\|iA+B\|_2{}^2-i\|iA-B\|_2{}^2)$$

となるから, この和は $\{x_j\}$ のとり方によらない. ▌

CONS $\{x_j\}$ をとり, $\langle A, B\rangle=\sum_j\langle Ax_j, Bx_j\rangle$ $(A, B\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H}))$ と定めると, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ 上の内積となり, $\|A\|_2=\langle A, A\rangle^{1/2}$ である.

〈補題 2.12〉 （1） $\langle x\otimes\bar{y}, u\otimes\bar{v}\rangle=\langle x, u\rangle\langle y, v\rangle$.

（2） $A, B\in\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$, $X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ ならば, $\langle A^*, B^*\rangle=\langle B, A\rangle$, $\langle XA, B\rangle=\langle A, X^*B\rangle$, $\langle AX, B\rangle=\langle A, BX^*\rangle$.

証明 （1）: CONS $\{x_j\}$ に対して,

$$\sum_j\langle(x\otimes\bar{y})x_j, (u\otimes\bar{v})x_j\rangle=\sum_j\langle\langle y, x_j\rangle x, \langle v, x_j\rangle u\rangle$$
$$=\langle x, u\rangle\sum_j\langle v, x_j\rangle\langle x_j, y\rangle=\langle x, u\rangle\langle v, y\rangle.$$

（2）: $\mathrm{Re}\langle A, B\rangle=(\|A+B\|_2{}^2-\|A-B\|_2{}^2)/4=(\|A^*+B^*\|_2{}^2-\|A^*-B^*\|_2{}^2)/4=\mathrm{Re}\langle A^*, B^*\rangle$. B を iB と入れ換えて, $\mathrm{Im}\langle A, B\rangle=-\mathrm{Re}\langle A, iB\rangle=-\mathrm{Re}\langle A^*, -iB^*\rangle=-\mathrm{Im}\langle A^*, B^*\rangle$. よって $\langle A^*, B^*\rangle=\overline{\langle A, B\rangle}=\langle B, A\rangle$. ▌

問 この補題の（2）の残りの等式を証明せよ.

$\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ に関して，次の定理は重要である．

〈定理 2.13〉 （1） $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ は上で定義した内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ により Hilbert 空間になる．

（2） $\boldsymbol{S}(\mathscr{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$．

証明 $\{x_j;\ j\in J\}\subset\mathscr{H}$ を CONS とする．

（1）：完備性を示せばよい．$\{A_n\}\subset\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ が $\|\cdot\|_2$ で Cauchy 列とすると，$\|A_n-A_m\|\leqq\|A_n-A_m\|_2\to 0$ $(n, m\to\infty)$ より，$A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が存在して $\|A_n-A\|\to 0$．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$n_0\in\boldsymbol{N}$ が存在して $\|A_n-A_m\|_2<\varepsilon$ $(\forall n, m\geqq n_0)$．このとき，任意の有限な $K\subset J$ に対して，

$$\sum_{j\in K}\|(A_n-A)x_j\|^2=\lim_{m\to\infty}\sum_{j\in K}\|(A_n-A_m)x_j\|^2\leqq\varepsilon^2,\quad \forall n\geqq n_0.$$

よって，$A_n-A\in\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ で $\|A_n-A\|_2\leqq\varepsilon$ $(\forall n\geqq n_0)$．ゆえに，$A\in\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ で $\|A_n-A\|_2\to 0$.

（2）：$A\in\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ として，$y_n\to 0$（弱収束）のとき $Ay_n\to 0$（強収束）を示せばよい．ある $M>0$ で $\|y_n\|\leqq M$ $(\forall n)$．有限な $K\subset J$ が存在して $\sum_{j\in J\setminus K}\|Ax_j\|^2<(\varepsilon/2M)^2$．$y_n=\sum_j\langle x_j, y_n\rangle x_j$ より $Ay_n=\sum_j\langle x_j, y_n\rangle Ax_j$ であるから，$z_{nj}=\langle x_j, y_n\rangle Ax_j$ とおいて，

$$\|Ay_n\|^2=\Big\|\sum_{j\in K}z_{nj}+\sum_{j\in J\setminus K}z_{nj}\Big\|^2\leqq 2\Big\|\sum_{j\in K}z_{nj}\Big\|^2+2\Big\|\sum_{j\in J\setminus K}z_{nj}\Big\|^2.$$

この右辺の第2項は，

$$\begin{aligned}2\Big\|\sum_{j\in J\setminus K}z_{nj}\Big\|^2&\leqq 2\Big(\sum_{j\in J\setminus K}|\langle x_j, y_n\rangle|\,\|Ax_j\|\Big)^2\\&\leqq 2\sum_{j\in J\setminus K}|\langle x_j, y_n\rangle|^2\sum_{j\in J\setminus K}\|Ax_j\|^2\leqq 2M^2(\varepsilon/2M)^2=\varepsilon^2/2.\end{aligned}$$

また，K は有限で $y_n\to 0$（弱収束）だから，第1項は $n\to\infty$ のとき0に収束する．よって n_0 が存在して $\|Ay_n\|<\varepsilon$ $(\forall n\geqq n_0)$． ▌

この定理と〈系 2.7〉より，任意の $A\in\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ は ONS $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ により $A=\sum_n\lambda_n x_n\otimes\bar{y}_n$（ここで $\lambda_n\downarrow 0$）と書ける．また，CC 作用素 $A=\sum_n\lambda_n x_n\otimes\bar{y}_n$ に対して，$A\in\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ と $\sum_n|\lambda_n|^2<\infty$ は同値であり，このとき $\|A\|_2=(\sum_n|\lambda_n|^2)^{1/2}$ であることが容易にわかる．

2.4 $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$

任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ に対して，極分解 $A=W|A|$ をとる．CONS $\{x_j\}$ に対して，$\sum_j\langle x_j, |A|x_j\rangle=\sum_j\||A|^{1/2}x_j\|^2$ より，$\sum_j\langle x_j, |A|x_j\rangle<\infty$ であることは $|A|^{1/2}$

$\in \boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ と同値である．このとき，

$$\sum_j \langle x_j, Ax_j \rangle = \sum_j \langle |A|^{1/2}W^*x_j, |A|^{1/2}x_j \rangle = \langle |A|^{1/2}W^*, |A|^{1/2} \rangle$$

となるから，この和は CONS $\{x_j\}$ のとり方によらない．

［**定義 2.4**］ CONS $\{x_j\}$ に対して，$\sum_j \langle x_j, |A|x_j \rangle < \infty$ となる $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を**トレースクラス作用素**といい，この作用素の全体を $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で表す．$A \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ の**トレース** $\mathrm{tr}(A)$ を $\mathrm{tr}(A) = \sum_j \langle x_j, Ax_j \rangle$ で定める．

〈**補題 2.14**〉 （1） $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，次は同値である： （i） $A \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$；（ii） $A^* \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$；（iii） $|A| \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$；（iv） $|A|^{1/2} \in \boldsymbol{S}(\mathcal{H})$；（v） $B, C \in \boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ が存在して $A = BC$.

（2） $A, B \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ ならば，$A+B, XA, AX \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.

（3） $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである．

証明 （1）：（i）$\Longleftrightarrow$（iii）$\Longleftrightarrow$（iv）$\Rightarrow$（v）は明らか．（v）$\Rightarrow$（i）を示す．極分解定理より $|A| = W^*A = (W^*B)C$ となるから，$\sum_j \langle x_j, |A|x_j \rangle = \sum_j \langle B^*Wx_j, Cx_j \rangle = \langle B^*W, C \rangle < \infty$.（i）$\Longleftrightarrow$（ii）は，（i）$\Longleftrightarrow$（v）を使うと，すぐにわかる．

（2）：$A, B \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，$XA, AX \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ は（1）の（v）を使うとすぐにわかる．$A+B$ の極分解をとると，$|A+B| = W^*(A+B) = W^*A + W^*B$ で，$W^*A, W^*B \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ だから，

$$\sum_j \langle x_j, |A+B|x_j \rangle = \sum_j \langle x_j, W^*Ax_j \rangle + \sum_j \langle x_j, W^*Bx_j \rangle < \infty.$$

よって $A+B \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.（3）は（2）より明らか．▌

明らかに，tr は $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ 上の線形汎函数である．これは次の性質をもつ．

〈**補題 2.15**〉 （1） $\mathrm{tr}(x \otimes \bar{y}) = \langle y, x \rangle$，$\forall x, y \in \mathcal{H}$.

（2） $\mathrm{tr}(A^*) = \overline{\mathrm{tr}(A)}$，$\forall A \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$.

（3） $A \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ が正ならば $\mathrm{tr}(A) \geqq 0$.

（4） $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(XA)$，$\forall A \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$\forall X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$.

証明 （4）：$A = BC$ $(B, C \in \boldsymbol{S}(\mathcal{H}))$ とすると，〈補題 2.12〉の（2）より
$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BCX) = \langle B^*, CX \rangle = \langle B^*X^*, C \rangle = \mathrm{tr}(XBC) = \mathrm{tr}(XA)$. ▌

問 この補題の（1）〜（3）を示せ．

$A\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ に対して $\|A\|_1=\mathrm{tr}(|A|)$ と定めると，次の補題が成立する．

〈補題 2.16〉 （1） $\|x\otimes\bar{y}\|_1=\|x\|\|y\|$, $\forall x, y\in\mathscr{H}$.

（2） $A\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ ならば，$|\mathrm{tr}(A)|\leqq\|A\|_1$, $\|A\|\leqq\|A\|_2\leqq\|A\|_1$.

（3） $A\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$, $X\in \boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ ならば，$\|AX\|_1\leqq\|X\|\|A\|_1$, $\|XA\|_1\leqq\|X\|\|A\|_1$.

（4） $\|\cdot\|_1$ は $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ 上のノルムであり，$\|A^*\|_1=\|A\|_1$ $(\forall A\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H}))$.

証明 （1）：$z=y/\|y\|$ とおくと，$|x\otimes\bar{y}|^2=(y\otimes\bar{x})(x\otimes\bar{y})=\|x\|^2\|y\|^2z\otimes\bar{z}$ より，$|x\otimes\bar{y}|=\|x\|\|y\|z\otimes\bar{z}$. z を含む CONS をとって計算すれば（1）を得る．

（2）：$A=W|A|$ と極分解して $B=|A|^{1/2}$ とおくと，$\|A\|_1=\|B\|_2{}^2$.

$$|\mathrm{tr}(A)|=|\langle BW^*, B\rangle|\leqq\|BW^*\|_2\|B\|_2\leqq\|B\|_2{}^2=\|A\|_1.$$

$$\|A\|_2{}^2=\|(WB)B\|_2{}^2\leqq\|WB\|^2\|B\|_2{}^2\leqq\|A\|\,\|A\|_1\leqq\|A\|_2\|A\|_1.$$

よって $\|A\|_2\leqq\|A\|_1$.

（3）：$A=W|A|$, $AX=V|AX|$ と極分解して $B=|A|^{1/2}$ とおくと，

$$\|AX\|_1=\mathrm{tr}(|AX|)=\mathrm{tr}(V^*AX)=\mathrm{tr}(V^*WBBX)=\langle BW^*V, BX\rangle$$
$$\leqq\|BW^*V\|_2\|BX\|_2\leqq\|W^*V\|\|X\|\|B\|_2{}^2\leqq\|X\|\|A\|_1.$$

$\|XA\|_1$ に対しても同様である．

（4）：$A, B\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ に対して，$A+B=W|A+B|$ と極分解すると，（2）と（3）より

$$\|A+B\|_1=\mathrm{tr}(W^*(A+B))\leqq|\mathrm{tr}(W^*A)|+|\mathrm{tr}(W^*B)|\leqq\|A\|_1+\|B\|_1.$$

他のノルムの条件は明らか．また，$\|A^*\|_1=\|A\|_1$ は極分解定理と（3）よりすぐにわかる．▌

この補題より，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ はノルム $\|\cdot\|_1$ によりノルム空間になる．さらに，次節で示すように，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ は Banach 空間になる．$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})\subset\boldsymbol{S}(\mathscr{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ だから，任意の $A\in \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ は ONS $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ により $A=\sum_n\lambda_nx_n\otimes\bar{y}_n$（ここで $\lambda_n\downarrow 0$）と書けて，$\|A\|_1=\sum_n\lambda_n<\infty$ であることがわかる．

2.5 作用素の空間と数列空間

この節では，これまで個々に議論してきた作用素の空間 $\boldsymbol{B}(\mathscr{H}), \boldsymbol{F}(\mathscr{H}), \boldsymbol{C}(\mathscr{H}), \boldsymbol{S}(\mathscr{H}), \boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ の間の関係について説明する．さらに，これらの空間と数列空間との対応関係についても述べる．

まず，作用素の空間の包含関係を与える．

〈**定理 2.17**〉 (1) $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{S}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{C}(\mathcal{H})\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$.

(2) $\boldsymbol{F}(\mathcal{H}),\boldsymbol{T}(\mathcal{H}),\boldsymbol{S}(\mathcal{H}),\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである.

(3) $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の最小の両側イデアルであり，$\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の閉両側イデアルである.

証明 (3)の前半以外は2.1〜2.4節ですでに証明してある. (3)の前半を示す. $\mathcal{J}$ を $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルとし，$0\neq A\in\mathcal{J}$ とする. $u\in\mathcal{H}$ が存在して $v=Au\neq 0$. 任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して，$Bv=x$ となる $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在するから，$x\otimes\bar{y}=BAu\otimes\bar{y}=BA(u\otimes\bar{y})\in\mathcal{J}$. よって $\boldsymbol{F}(\mathcal{H})\subset\mathcal{J}$. ▌

註 $\mathcal{H}$ が可分ならば，$\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を除く $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルで最大なものである (Schatten [21] 参照).

次に，空間 $\boldsymbol{C}(\mathcal{H}),\boldsymbol{T}(\mathcal{H}),\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ の共役空間を決定しよう. 〈定理 2.13〉より $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間であるから，Riesz の定理により $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})^*$ は $\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$ に同型である. 任意の $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ に対して，$\varphi_T(A)=\mathrm{tr}(TA)$ $(A\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H}))$ と定めると，〈補題 2.16〉より $\varphi_T\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$ である. また，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\psi_A(T)=\mathrm{tr}(TA)$ $(T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$ と定めると，$\psi_A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*$ である. これらの対応 $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\longmapsto\varphi_T\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$, $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\longmapsto\psi_A\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*$ によって，次の定理が成立する.

〈**定理 2.18**〉 $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{T}(\mathcal{H}),\ \boldsymbol{T}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),\ \boldsymbol{S}(\mathcal{H})^*=\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$.

証明 写像 $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\longmapsto\varphi_T\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$ が線形写像であることは明らか. これが全射であることを示す. $\varphi\in\boldsymbol{C}(\mathcal{H})^*$ のとき，$|\varphi(x\otimes\bar{y})|\leqq\|\varphi\|\|x\otimes\bar{y}\|=\|\varphi\|\|x\|\|y\|$ より，$F(y,x)=\varphi(x\otimes\bar{y})$ $(x,y\in\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ 上の有界な双線形汎函数となる. したがって，1.3節1°より，$T\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して $\varphi(x\otimes\bar{y})=\langle y,Tx\rangle$ $(\forall x,y\in\mathcal{H})$. $T=W|T|$ と極分解し，W の初期空間の CONS$\{x_j;\ j\in J\}$ をとる. 任意の有限な $K\subset J$ に対して，$\|\sum_{j\in K}x_j\otimes\overline{Wx_j}\|=1$ より，

$$\sum_{j\in K}\langle x_j,|T|x_j\rangle=\sum_{j\in K}\langle Wx_j,Tx_j\rangle=\varphi\Big(\sum_{j\in K}x_j\otimes\overline{Wx_j}\Big)\leqq\|\varphi\|.$$

また，$x\in\{x_j\}^\perp$ に対しては，$\langle x,|T|x\rangle=\langle Wx,Tx\rangle=0$. よって $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ かつ $\|T\|_1=\mathrm{tr}(|T|)\leqq\|\varphi\|$. $\varphi(x\otimes\bar{y})=\langle y,Tx\rangle=\mathrm{tr}(T(x\otimes\bar{y}))$ より，$\varphi(A)=\varphi_T(A)$ $(\forall A\in\boldsymbol{F}(\mathcal{H}))$. ところで，〈系 2.7〉より，$\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$ は $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ で稠密であることがわかる. よって $\varphi=\varphi_T$ で $\|T\|_1\leqq\|\varphi_T\|$. さらに，〈補題 2.16〉より $\|\varphi_T\|\leqq\|T\|_1$. したがって $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})\longmapsto\varphi_T\in$

$\boldsymbol{C}(\mathscr{H})^*$ は上への等距離線形写像である．これで $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})^*=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ が示せた．$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ も同様な仕方で証明される．▌

問 $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の証明を与えよ．

〈定理 2.19〉 $\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ は C* 代数であり，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H}), \boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ は Banach $*$ 代数である．

証明 $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ が Banach 空間であること以外は，2.2〜2.4 節で証明してある．また，前定理より，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ が Banach 空間であることもわかる．▌

〈定理 2.20〉 稠密定理： $\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|}=\boldsymbol{C}(\mathscr{H}), \overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_2}=\boldsymbol{S}(\mathscr{H}), \overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_1}=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$．また，$\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ で弱 $*$ 位相（i.e.，$\sigma(\boldsymbol{B}(\mathscr{H}), \boldsymbol{T}(\mathscr{H}))$ 位相）で稠密である．

証明 〈系 2.7〉より，$\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|}=\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ がわかる．2.3 節と 2.4 節の最後に述べたことより，$\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_2}=\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$，$\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_1}=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ がわかる．また，最後の部分は，$\overline{\boldsymbol{F}(\mathscr{H})}^{\|\cdot\|_1}=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ と $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ より明らか．▌

註 この定理より，$\mathscr{H}$ が可分ならば，$\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$ はすべて可分である．他方，『$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が可分$\Longleftrightarrow \dim \mathscr{H}<\infty$』である．

以下，1.6 節 I で定義した数列空間 f_0, c_0, c, l^p $(1\leqq p<\infty)$, l^∞ の性質を，これまでの作用素の空間と対比させて述べよう．各数列空間の間の基本性質は次のようにまとめられる．

1° $f_0\subset l^p\subset l^q\subset c_0\subset c\subset l^\infty$ $(1\leqq p<q)$.

2° c_0, c, l^p $(1\leqq p<\infty)$, l^∞ は各ノルムにより Banach 空間である．特に，l^2 は Hilbert 空間であり，c_0, c は l^∞ の閉部分空間である．

3° $\overline{f_0}^{\|\cdot\|}=c_0$, $\overline{f_0}^{\|\cdot\|_p}=l^p$ $(1\leqq p<\infty)$.

4° $(c_0)^*=l^1$, $(l^1)^*=l^\infty$, $(l^p)^*=l^q$ $(1<p<+\infty,\ 1/p+1/q=1)$．ただし，$y\in l^1$ は $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $(x\in c_0)$ によって $y\in(c_0)^*$ と同一視する．他も同様な仕方で同一視する．

作用素の空間 $\boldsymbol{F}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{C}(\mathscr{H})$，$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ をそれぞれ数列空間 $f_0, l^1, l^2, c_0, l^\infty$ と対比させると，〈定理 2.17〉，〈定理 2.18〉，〈定理 2.20〉はそれぞれ命題 1°, 4°, 3° と完全な類似性をもつことがわかる．さらに，積 $xy=\{x_n y_n\}$，

対合 $x^*=\{\bar{x}_n\}$ により，各数列空間は＊代数になり，f_0, c_0, l^p $(1\leqq p<\infty)$ は l^∞ のイデアルでもある．ここで注目すべきことは，作用素の空間は非可換な＊代数であるが，数列空間の場合はすべて可換なことである．作用素の空間の難しさはこの非可換性に起因している．

作用素の空間と数列空間との対応について，さらにひとつの結果を述べよう．可算な ONS $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ を固定して，$a=\{a_n\}\in l^\infty$ に対して $\varphi(a)=\sum_n a_n x_n\otimes\bar{x}_n\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ とおくと，線形写像 $\varphi: l^\infty\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が定義される．この写像を各数列空間に制限すると，

5° $\varphi: f_0\to\boldsymbol{F}(\mathcal{H})$，$\varphi: l^1\to\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$，$\varphi: l^2\to\boldsymbol{S}(\mathcal{H})$，$\varphi: c_0\to\boldsymbol{C}(\mathcal{H})$ はすべて等距離＊同型写像である．もちろん，これらの等距離＊同型写像は全射でなく，その値域はすべて可換な＊部分代数になっている．

問 命題 5° を証明せよ．

以上の説明から，これまで議論した作用素の空間は数列空間の非可換版であることが納得されよう．

2.6 Hilbert 空間 L^2 上の作用素

この節では，測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上の Hilbert 空間 $L^2=L^2(\Omega)$ 上で定義される掛算作用素と積分作用素について考えよう．空間 L^p $(1\leqq p\leqq\infty)$ については 1.6 節Ⅲを参照されたい．

Banach 空間 L^∞ は積 $(fg)(\omega)=f(\omega)g(\omega)$ と対合 $f^*(\omega)=\overline{f(\omega)}$ により可換な C* 代数になる．各 $f\in L^\infty$ に対して，$M_f\in\boldsymbol{B}(L^2)$ が $(M_f x)(\omega)=f(\omega)x(\omega)$ $(x\in L^2)$ で定義される．この M_f を f による**掛算作用素**という．写像 $f\in L^\infty\longmapsto M_f\in\boldsymbol{B}(L^2)$ は線形写像であり，$M_{fg}=M_f M_g$，$M_{\bar{f}}=(M_f)^*$，$\|M_f\|=\|f\|_\infty$ を満たすから，等距離＊同型写像となる．したがって，$f\longmapsto M_f$ によって L^∞ と $M(L^\infty)\equiv\{M_f\,;\,f\in L^\infty\}$ は＊同型である．

問 上記の事柄を証明せよ．

〈定理 2.21〉 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が σ-有限のとき，$M(L^\infty)$ は $\boldsymbol{B}(L^2)$ の極大可換な v.N. 代数である．つまり，$M(L^\infty)=M(L^\infty)'$ が成立する

この定理の証明は，第4章の結果を必要とするので，6.1 節で与える．

註 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ が σ-有限とは限らない一般の測度空間のとき，次は同値である：(1) $M(L^\infty)$ が $\boldsymbol{B}(L^2)$ で極大可換；(2) Riesz の定理 (i.e., $(L^1)^*=L^\infty$) が成立する；(3) Radon-Nikodym の定理 (i.e., $\mathscr{F}$ 上の有限測度 ν が $\nu \ll \mu$ ならば，$f \in L^1$ が存在して $\nu(E)=\int_E f d\mu$, $\forall E \in \mathscr{F}$) が成立する．

次に，L^2 上の積分作用素について説明しよう．直積測度空間$(\Omega\times\Omega, \mathscr{F}\otimes\mathscr{F}, \mu\otimes\mu)$ 上の可測函数 (i.e., 2変数の函数として同時可測である) $K(\omega, \omega')$ に対して，L^2 上の作用素 $\tilde{K}$ を $(\tilde{K}x)(\omega)=\int_\Omega K(\omega,\omega')x(\omega')d\mu(\omega')$ で定義する．ここで $\mathrm{dom}\,\tilde{K}$ は，この積分値が a.e. ω で存在し $\tilde{K}x \in L^2$ となる $x \in L^2$ の全体である．この作用素 $\tilde{K}$ を，K を**核函数**にもつ**積分作用素**という．特に $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ のとき，任意の $x \in L^2$ に対して，Riesz の定理を使うと

$$\int_\Omega\left\{\int_\Omega |K(\omega,\omega')x(\omega')|d\mu(\omega')\right\}^2 d\mu(\omega)$$
$$\leqq \left\{\int_\Omega\int_\Omega |K(\omega,\omega')|^2 d\mu(\omega)d\mu(\omega')\right\}\|x\|_2^2.$$

よって，$\tilde{K} \in \boldsymbol{B}(L^2)$ で $\|\tilde{K}\| \leqq \|K\|_2$ となる．さらに，

〈定理 2.22〉 $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ ならば $\tilde{K} \in \boldsymbol{S}(L^2)$ であり，対応 $K \in L^2(\Omega\times\Omega) \longmapsto \tilde{K} \in \boldsymbol{S}(L^2)$ によって，$\boldsymbol{S}(L^2)$ は Hilbert 空間として $L^2(\Omega\times\Omega)$ に同型である．さらに，ONS $\{x_k\}$, $\{y_k\} \subset L^2$ により $\tilde{K}=\sum_k \lambda_k x_k \otimes y_k$ と表すと，

$$\int_\Omega\int_\Omega\left|K(\omega,\omega')-\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(\omega)\overline{y_k(\omega')}\right|^2 d\mu(\omega)d\mu(\omega') \to 0 \quad (n\to\infty).$$

証明 $\{x_j ; j \in J\}$ を L^2 の CONS とすると，$\{x_i(\omega)\overline{x_j(\omega')} ; i, j \in J\}$ は $L^2(\Omega\times\Omega)$ の CONS である．$K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ ならば，

$$\sum_{i,j}|\langle x_i, \tilde{K}x_j\rangle|^2=\sum_{i,j}\left|\int_\Omega\int_\Omega \overline{x_i(\omega)}K(\omega,\omega')x_j(\omega')d\mu(\omega')d\mu(\omega)\right|^2$$
$$=\sum_{i,j}\left|\int_\Omega\int_\Omega \overline{\overline{x_i(\omega)\overline{x_j(\omega')}}}K(\omega,\omega')d\mu(\omega)d\mu(\omega')\right|^2$$
$$=\sum_{i,j}|\langle x_i(\cdot)\overline{x_j(\cdot)}, K(\cdot,\cdot)\rangle|^2=\|K(\cdot,\cdot)\|_2^2.$$

よって $\tilde{K} \in \boldsymbol{S}(L^2)$ で $\|\tilde{K}\|_2=\|K\|_2$ となる．したがって，写像 $K \in L^2(\Omega\times\Omega) \longmapsto \tilde{K} \in \boldsymbol{S}(L^2)$ が定義できて，これは等距離作用素となる．これがユニタリー作用素であること

を示すには，全射であることをいえばよい．いま，$A\in S(L^2)$ とすると，〈系 2.7〉より $\{\lambda_k\}\subset \boldsymbol{R}$ と ONS$\{x_k\}$, $\{y_k\}$ が存在して $A=\sum_k \lambda_k x_k\otimes\bar{y}_k$ かつ $\sum_k \lambda_k{}^2<\infty$．このとき，$\left\|A-\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\otimes\bar{y}_k\right\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$．そこで $K_n(\omega,\omega')=\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k(\omega)\overline{y_k(\omega')}$ とおくと，$K_n\in L^2(\Omega\times\Omega)$ であり，

$$\|K_m-K_n\|_2=\|\tilde{K}_m-\tilde{K}_n\|_2=\left(\sum_{k=n+1}^m \lambda_k{}^2\right)^{1/2}\to 0 \quad (m>n\to\infty).$$

よって $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$ が存在して，$\|\tilde{K}_n-\tilde{K}\|_2=\|K_n-K\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$．ところで，$\tilde{K}_n=\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\otimes\bar{y}_k$ であるから，$A=\tilde{K}$ が示せた．ゆえに $S(L^2)\cong L^2(\Omega\times\Omega)$ であり，定理の後半の証明も上の議論に含まれている．▌

註 $L^2(\Omega\times\Omega)\cong L^2(\Omega)\otimes L^2(\Omega)$（1.6 節Ⅳ参照）であるから，上の定理より $S(L^2)\cong L^2\otimes L^2$ がわかる．一般の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対しても同様に，$S(\mathcal{H})\cong\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ が成立する．

問 （1） $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$ に対して，『$\tilde{K}=\tilde{K}^*\Longleftrightarrow K(\omega,\omega')=\overline{K(\omega',\omega)}$ a. e.』を示せ．

（2） Ω がコンパクト Hausdorff 空間，μ が正則な Borel 測度のとき，$K\in C(\Omega\times\Omega)$ に対して，『積分作用素 $\tilde{K}$ が正$\Longleftrightarrow K$ が正の定符号 (i. e., $\sum_{i,j=1}^n \bar{\lambda}_i\lambda_j K(\omega_i,\omega_j)\geqq 0$, $\forall n\in \boldsymbol{N}$, $\forall\omega_1,\cdots,\omega_n\in\Omega$, $\forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\boldsymbol{C}$)』を示せ．

2.7 積分作用素の展開定理

この節では，Hilbert 空間 $L^2(a,b)$ をとり，その上の積分作用素が連続な核函数をもつ場合について論じよう．初めに核函数の固有値展開の一様収束に関する Mercer の定理を示し，さらにこれを用いて連続な確率過程に対する Karhunen–Loève 展開定理を与える．

核函数 $K\in L^2([a,b]\times[a,b])$ をもつ積分作用素を $\tilde{K}\in S(L^2(a,b))$ とする．$\tilde{K}$ が正作用素のとき，固有値展開定理より $\tilde{K}=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k$ と表される．ここで，$\{x_k\}$ は $\tilde{K}$ の固有ベクトルからなる ONS で $0\leqq\lambda_k\downarrow 0$．核函数が連続なとき，次の重要な定理が成立する．

〈定理 2.23〉 Mercer の定理：$L^2(a,b)$ 上の正の積分作用素 $\tilde{K}=\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k\in S(L^2(a,b))$ が連続な核函数 $K\in C([a,b]\times[a,b])$ をもつとき，次が成立

する．

（1） $\{x_k\} \subset C[a,b]$ であり，$K(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}$ $(\forall s,t\in[a,b])$．この右辺は絶対収束し，さらに $C([a,b]\times[a,b])$ および $L^2([a,b]\times[a,b])$ でノルム収束する．すなわち，

$$\sup_{a\leq s,\,t\leq b}\left|K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}\right|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\int_a^b\int_a^b\left|K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}\right|^2 dsdt\to 0 \quad (n\to\infty).$$

（2） $\tilde{K}\in\boldsymbol{T}(L^2(a,b))$ であり，$\int_a^b K(t,t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\mathrm{tr}(\tilde{K})$．

証明 （1）：$L^2([a,b]\times[a,b])$ でのノルム収束については，〈定理 2.22〉で与えてある．$\tilde{K}x_k=\lambda_k x_k$ より，$\lambda_k x_k(s)=\int_a^b K(s,t)x_k(t)dt$ (a.e. s)．この右辺は $s\in[a,b]$ の連続函数だから，$\{x_k\}\subset C[a,b]$ にとれる．$R_n(s,t)=K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}$ とおくと，$R_n\in C([a,b]\times[a,b])$ であり，$\tilde{R}_n=\tilde{K}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k$ は正作用素である．よって $R_n(t,t)=K(t,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2\geqq 0$ $(\forall t\in[a,b])$ が容易にわかる．ゆえに，ある $M>0$ が存在して $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|x_k(t)|^2\leqq K(t,t)\leqq M$ $(\forall t\in[a,b])$．したがって，

$$\left(\sum_{k=n+1}^{m}|\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}|\right)^2\leqq\left(\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k|x_k(s)|^2\right)\left(\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k|x_k(t)|^2\right)$$

$$\leqq M\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k|x_k(t)|^2\to 0 \quad (m>n\to\infty)$$

となるから，$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}$ は任意の t に対して s について一様に絶対収束する．同様に，$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}$ は任意の s に対して t について一様に絶対収束する．そこで $K_0(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}$ とおくと，$K_0(s,t)$ は s と t の一方を固定したとき他方の連続函数である．また，$L^2([a,b]\times[a,b])$ でのノルム収束から，a.e. s に対して $K(s,t)=K_0(s,t)$ (a.e. t)．この両辺は t の連続函数だから，a.e. s に対して $K(s,t)=K_0(s,t)$ $(\forall t\in[a,b])$．さらに，この両辺が s の連続函数だから，$K(s,t)=K_0(s,t)$ $(\forall s,t\in[a,b])$ を得る．函数列 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2\in C[a,b]$ は単調増加して $K(t,t)$ に収束するから，Dini の定理より，$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2$ は $K(t,t)$ に一様収束する．よって

$$\sup_{a\leq s,\,t\leq b}\left|K(s,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}\right|$$

$$\leq M \sup_{a\leq t\leq b} \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k |x_k(t)|^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

となるから，$C([a,b]\times[a,b])$ でのノルム収束を得る．

（2）：（1）より $K(t,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|x_k(t)|^2$（一様収束）であるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_a^b|x_k(t)|^2dt=\int_a^b K(t,t)dt<\infty.$$

よって，$\tilde{K}\in \boldsymbol{T}(L^2(a,b))$ で $\int_a^b K(t,t)dt=\mathrm{tr}(\tilde{K})$. ▌

次に，K–L 展開定理を述べるが，そのために確率過程に関するいくつかの概念が必要である．$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を確率測度空間とする．時刻を表す連続パラメータ $t\in[a,b]$ をもち，2次のモーメントが存在する Ω 上の**確率過程** $\xi(t)=\xi(t,\cdot)$ を考える．これは，Ω 上の確率変数の族 $\{\xi(t,\cdot)\,;\,a\leq t\leq b\}$ で $\xi(t,\cdot)\in L^2(\Omega)$ $(\forall t\in[a,b])$ となるもの，すなわちパラメータ空間 $[a,b]$ から Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ への写像 $\xi(\cdot)$ のことである．任意の $t\in[a,b]$ に対して $\|\xi(s)-\xi(t)\|_2\to 0$ $(s\to t)$ のとき，確率過程 $\xi(t)$ は（2乗平均）**連続**であるという．また，$K_\xi(s,t)=\langle\xi(s),\xi(t)\rangle=\int_\Omega\overline{\xi(s,\omega)}\xi(t,\omega)d\mu(\omega)$ $(s,t\in[a,b])$ で定義される $[a,b]\times[a,b]$ 上の函数 K_ξ を $\xi(t)$ の**共分散函数**という．確率過程 $\xi(t)$ が連続なとき，$\xi(\cdot)\in L^2([a,b],L^2(\Omega))$ となり，したがって $\xi(t,\omega)$ は2変数の函数として同時可測である（1.6 節Ⅳ参照）．

〈補題 2.24〉 確率過程 $\xi(t)$ に対して，次は同値である：（1）$\xi(t)$ が連続；（2）$K_\xi\in C([a,b]\times[a,b])$.

証明 $K_\xi(s,t)=\langle\xi(s),\xi(t)\rangle$ と連続性の定義から，簡単な計算によって示せる．▌

問 （1） この補題の証明を完成させよ．

（2） 共分散函数 K_ξ は正の定符号であることを示せ．

連続な確率過程 $\xi(t)$ が与えられたとき，その共分散函数 K_ξ を核函数にもつ $L^2(a,b)$ 上の積分作用素 $\tilde{K}_\xi$ が定まる．〈補題 2.24〉より $K_\xi\in C([a,b]\times[a,b])$ だから，$K_\xi\in L^2([a,b]\times[a,b])$ でもある．よって〈定理 2.22〉より，$\tilde{K}_\xi\in \boldsymbol{S}(L^2(a,b))$ となる．また，$\tilde{K}_\xi$ は正作用素である．実際，任意の $x\in L^2(a,b)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle x, \widetilde{K}_\xi x\rangle &= \int_a^b\int_a^b K_\xi(s,t)\overline{x(s)}x(t)dsdt \\ &= \int_a^b\int_a^b \langle x(s)\xi(s), x(t)\xi(t)\rangle dsdt \\ &= \int_\Omega\left|\int_a^b x(t)\xi(t,\omega)dt\right|^2 d\mu(\omega) \geqq 0.\end{aligned}$$

したがって，固有値展開定理より $\widetilde{K}_\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k \otimes \bar{x}_k$ （$\{x_k\} \subset L^2(a,b)$ は ONS, $\lambda_k \downarrow 0$）と表される．ここで，λ_k と x_k はそれぞれ $\widetilde{K}_\xi$ の固有値と固有ベクトル (i.e., $\widetilde{K}_\xi x_k = \lambda_k x_k$) である．Mercer の定理より，$\widetilde{K}_\xi \in \boldsymbol{T}(L^2(a,b))$ であり，$\{x_k\} \subset C[a,b]$ にとれる．このとき，確率過程論における基本展開定理が，次のような函数解析的形式で与えられる．

〈定理 2.25〉 K-L 展開定理：連続な確率過程 $\xi(t)$ に対して，次が成立する．

（1） 確率変数列

$$\xi_k(\cdot) = \lambda_k^{-1/2}\int_a^b x_k(t)\xi(t,\cdot)dt, \quad k \in \boldsymbol{N}$$

は Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ において ONS になる．ここで，上式の右辺は $L^2(\Omega)$-値 Bochner 積分である．

（2） $t \in [a,b]$ について一様に，

$$\left\|\xi(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{1/2}\overline{x_k(t)}\xi_k(\cdot)\right\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

証明 （1）：$t \in [a,b] \longmapsto x_k(t)\xi(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ は連続であるから，これは $L^2(\Omega)$-値 Bochner 可積分である．ゆえに，確率変数列 $\{\xi_k\} \subset L^2(\Omega)$ は存在する．これが ONS であることを示す．

$$\begin{aligned}\langle \xi_i, \xi_j\rangle &= (\lambda_i\lambda_j)^{-1/2}\int_\Omega\int_a^b\int_a^b \overline{x_i(s)\xi(s,\omega)}x_j(t)\xi(t,\omega)dsdtd\mu(\omega) \\ &= (\lambda_i\lambda_j)^{-1/2}\int_a^b\int_a^b \overline{x_i(s)}x_j(t)\left(\int_\Omega \overline{\xi(s,\omega)}\xi(t,\omega)d\mu(\omega)\right)dsdt \\ &= (\lambda_i\lambda_j)^{-1/2}\int_a^b \overline{x_i(s)}\left(\int_a^b K_\xi(s,t)x_j(t)dt\right)ds \\ &= (\lambda_i\lambda_j)^{-1/2}\langle x_i, \widetilde{K}_\xi x_j\rangle = (\lambda_i\lambda_j)^{-1/2}\lambda_j\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

（2）：$\{\xi_k\}$ が ONS であるから，

$$\left\|\xi(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^{1/2}\overline{x_k(t)}\xi_k(\cdot)\right\|_2^2$$
$$=\|\xi(t,\cdot)\|_2{}^2-2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^{1/2}\mathrm{Re}(\overline{x_k(t)}\langle\xi(t,\cdot),\xi_k(\cdot)\rangle)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2$$
$$=K_\xi(t,t)-2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\overline{x_k(t)}\int_a^b x_k(s)\langle\xi(t,\cdot),\xi(s,\cdot)\rangle ds\right)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2$$
$$=K_\xi(t,t)-2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\overline{x_k(t)}\int_a^b K_\xi(t,s)x_k(s)ds\right)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2$$
$$=K_\xi(t,t)-2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2$$
$$=K_\xi(t,t)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k(t)|^2,\quad \forall t\in[a,b],\forall n\in\boldsymbol{N}.$$

よって Mercer の定理より,

$$\sup_{a\leq t\leq b}\left\|\xi(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k{}^{1/2}\overline{x_k(t)}\xi_k(\cdot)\right\|_2\to 0\quad(n\to\infty).\ \blacksquare$$

註 確率過程 $\xi(t)$ が与えられたとき,〈定理 2.25〉の (2) が 2 つの ONS $\{x_k\}\subset L^2(a,b)$ と $\{\xi_k\}\subset L^2(\Omega)$ に対して成立するならば,固有値展開 $\tilde{K}_\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k$ が逆に得られる. 実際,

$$K_\xi(s,t)=\langle\xi(s),\xi(t)\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}(\lambda_i\lambda_j)^{1/2}x_i(s)\overline{x_j(t)}\langle\xi_i,\xi_j\rangle$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k(s)\overline{x_k(t)}.$$

この収束は $s,t\in[a,b]$ について一様であるから, $L^2([a,b]\times[a,b])$ でノルム収束する. よって $K_\xi\in L^2([a,b]\times[a,b])$ であり, $\left\|\tilde{K}_\xi-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k\right\|_2\to 0\ (n\to\infty)$. つまり $\tilde{K}_\xi=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k\otimes\bar{x}_k$.

2.8 再生核 Hilbert 空間 (RKHS)

この節では,再生核 Hilbert 空間の基本性質とそのいくつかの例を述べよう. まず,定義を与える.

［**定義 2.5**］ 集合 Γ ($\neq\emptyset$) 上の複素数値函数からなるひとつの線形空間 $\mathcal{H}$ が Γ 上の**再生核 Hilbert 空間** (reproducing kernel Hilbert space ; 以下, RKHS と書く) であるとは,次の 2 条件を満たすときをいう : (i) $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間である ; (ii) 直積集合 $\Gamma\times\Gamma$ 上の複素数値函数 $K(s,t)=K_t(s)$

が存在して，$K_t \in \mathscr{H}$ $(\forall t \in \Gamma)$ かつ $x(t)=\langle K_t, x\rangle$ $(\forall x \in \mathscr{H}, \forall t \in \Gamma)$．この関数 K を RKHS $\mathscr{H}$ の**再生核**といい，この RKHS $\mathscr{H}$ を $\mathscr{H}(K)$ で表す．

RKHS $\mathscr{H}(K)$ と再生核 K は，次の性質をもつ．

〈**補題 2.26**〉 （1） $K(s,t)=\langle K_s, K_t\rangle=\overline{K(t,s)}$，$\forall s, t \in \Gamma$．

（2） $\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\lambda}_i \lambda_j K(t_i, t_j) \geqq 0$，$\forall t_1, \cdots, t_n \in \Gamma$，$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{C}$．

（3） $\{K_t \,;\, t \in \Gamma\}$ によって張られる部分空間は $\mathscr{H}(K)$ で稠密である．

（4） $\mathscr{H}(K)$ の再生核は一意である．

証明 （1）：$K(s,t)=K_t(s)=\langle K_s, K_t\rangle=\overline{\langle K_t, K_s\rangle}=\overline{K(t,s)}$．

（2）：$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\lambda}_i \lambda_j K(t_i, t_j)=\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\lambda}_i \lambda_j \langle K_{t_i}, K_{t_j}\rangle=\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j K_{t_j}\right\|^2 \geqq 0$．

（3）：$x \in \{K_t \,;\, t \in \Gamma\}^{\perp}$ ならば，$x(t)=\langle K_t, x\rangle=0$ $(\forall t \in \Gamma)$ となり，$x=0$．

（4）：$\mathscr{H}(K)$ が別に再生核 $K'(s,t)$ をもつならば，

$$\begin{aligned} K'(s,t)&=K_t'(s)=\langle K_s, K_t'\rangle=\overline{\langle K_t', K_s\rangle} \\ &=\overline{K_s(t)}=\overline{K(t,s)}=K(s,t). \end{aligned}$$ ▌

問 $\mathscr{H}(K)$ が Γ 上の RKHS のとき，次を示せ．

（1） $\{x_n\} \subset \mathscr{H}(K)$ が $x \in \mathscr{H}(K)$ に弱収束すれば，$x_n(t) \to x(t)$ $(\forall t \in \Gamma)$．

（2） $|K(s,t)|^2 \leqq K(s,s)K(t,t)$．

〈**定理 2.27**〉 集合 Γ 上の関数からなる Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ に対して，次は同値である．

（1） $\mathscr{H}$ が再生核をもつ，すなわち Γ 上の RKHS である．

（2） $\dot{t} \in \mathscr{H}^*$ $(\forall t \in \Gamma)$，ここで $\dot{t}(x)=x(t)$ $(x \in \mathscr{H})$．

証明 （1）⇒（2）は $\dot{t}(x)=x(t)=\langle K_t, x\rangle$ より明らか．

（2）⇒（1）：任意の $t \in \Gamma$ に対して，Riesz の定理より $k_t \in \mathscr{H}$ が存在して $\dot{t}(x)=\langle k_t, x\rangle$ $(\forall x \in \mathscr{H})$．そこで，$K(s,t)=\langle k_s, k_t\rangle$ $(s, t \in \Gamma)$ とおくと，

$$K_t(s)=K(s,t)=\langle k_s, k_t\rangle=\dot{s}(k_t)=k_t(s), \quad \forall s, t \in \Gamma.$$

よって，$K_t=k_t \in \mathscr{H}$ かつ $x(t)=\dot{t}(x)=\langle k_t, x\rangle=\langle K_t, x\rangle$ $(\forall x \in \mathscr{H})$． ▌

〈**定理 2.28**〉 Γ 上の RKHS $\mathscr{H}(K)$ がある Hilbert 空間 $\mathscr{L}$ の閉部分空間であるとき，$(Pz)(t)=\langle K_t, z\rangle$ $(z \in \mathscr{L}, t \in \Gamma)$ とおくと，$Pz \in \mathscr{H}(K)$ で，P は $\mathscr{L}$

から $\mathcal{H}(K)$ への射影作用素である．

証明　任意の $z\in\mathcal{L}$ を $z=x+y$ $(x\in\mathcal{H}(K),\ y\in\mathcal{H}(K)^{\perp})$ と直交分解すると，

$$(Pz)(t)=\langle K_t, z\rangle=\langle K_t, x\rangle=x(t),\quad \forall t\in\Gamma.$$

よって $Pz=x\in\mathcal{H}(K)$ となり，P は $\mathcal{H}(K)$ への射影作用素である．▮

〈定理 2.29〉　Γ 上の RKHS $\mathcal{H}(K)$ が可分のとき，任意の CONS $\{x_n\}\subset\mathcal{H}(K)$ に対して，

$$K_t=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x_n(t)}x_n\ \text{（ノルム収束）},\quad \forall t\in\Gamma,$$

$$K(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n(s)\overline{x_n(t)}\ \text{（絶対収束）},\quad \forall s,t\in\Gamma.$$

証明　$\{x_n\}$ が CONS だから，$K_t\in\mathcal{H}(K)$ を Fourier 展開して，

$$K_t=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, K_t\rangle x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{x_n(t)}x_n\ \text{（ノルム収束）}.$$

また，Parseval の等式より，

$$K(s,t)=\langle K_s, K_t\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle K_s, x_n\rangle\langle x_n, K_t\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n(s)\overline{x_n(t)}.$$

これが絶対収束することも明らか．▮

註　この定理は，K が積分作用素の核函数である場合の展開定理（Mercer の定理など）と対比してみると面白い．

以下，RKHS の例を挙げて説明する．まず，有限次元の場合を考える．$\Gamma=\{1,2,\cdots,n\}$ とし，$n\times n$ 複素行列 (λ_{ij}) は正の定符号かつ逆行列 (μ_{ij}) をもつとする．Γ 上の複素函数全体である $\boldsymbol{C}^n$ は，内積 $\langle x,y\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\bar{x}_i y_j$ $(x,y\in\boldsymbol{C}^n)$ により Hilbert 空間になる．$K(i,j)=\bar{\mu}_{ji}$ $(i,j\in\Gamma)$ とおくと，$\langle K_t,x\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\mu_{ti}x_j=x_t$ $(\forall t\in\Gamma)$．よって $\boldsymbol{C}^n$ は K を再生核にもつ RKHS である．

次に，1.6 節 VI で述べた Hilbert 空間 $A^2(\Gamma)$ を考える．そこで説明したように，任意の $z\in\Gamma$ に対して，$r>0$ が存在して $|f(z)|\leqq\|f\|_2/\sqrt{\pi}r$ $(\forall f\in A^2(\Gamma))$ が成立する．よって，$\dot{z}(f)=f(z)$ $(f\in A^2(\Gamma))$ とおくと，$\dot{z}\in(A^2(\Gamma))^*$ $(\forall z\in\Gamma)$ となるから，〈定理 2.27〉より $A^2(\Gamma)$ は RKHS である．この RKHS $A^2(\Gamma)$ の再生核は **Bergman の核函数**と呼ばれ，函数論において有用である．

さらにひとつの重要な例を述べよう．前節の後半で論じた2次のモーメントをもつ確率過程 $\xi(t)$ を再び考える．ここでは，パラメータ t の空間は任意の集合 Γ でよい．つまり $\xi(\cdot)$ は Γ から $L^2(\Omega)$ への写像のことである．この $\xi(t)$ に対して，その共分散函数 $K(s,t)=\langle\xi(s),\xi(t)\rangle$ $(s,t\in\Gamma)$ を再生核にもつRKHSを構成しよう．これはRKHSの一般的な例として確率過程論では広く論じられている．さて，$\{\xi(t)\,;\,t\in\Gamma\}$ によって張られる $L^2(\Omega)$ の閉部分空間を $\mathscr{H}$ とする．各 $x\in\mathscr{H}$ に対して $k_x(t)=\langle\xi(t),x\rangle$ $(t\in\Gamma)$ とおき，$\mathscr{K}=\{k_x\,;\,x\in\mathscr{H}\}$ とする．$\mathscr{K}$ は Γ 上の複素数値函数からなる線形空間であり，写像 $x\in\mathscr{H}\longmapsto k_x\in\mathscr{K}$ は線形写像で全単射である．よって，内積 $\langle k_x,k_y\rangle=\langle x,y\rangle$ により，$\mathscr{K}$ は Hilbert 空間になる．このとき，次の定理を得る．

〈定理 2.30〉 （1） $K_t=k_{\xi(t)}$, $\forall t\in\Gamma$.

（2） $\mathscr{K}$ は K_ξ を再生核にもつRKHSである．

（3） 対応 $x\longmapsto k_x$ によって，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{K}$ は同型である．

証明 （1）：$K_t(s)=K(s,t)=\langle\xi(s),\xi(t)\rangle=k_{\xi(t)}(s)$ $(\forall s\in\Gamma)$.

（2）：（1）より $K_t\in\mathscr{K}$ $(\forall t\in\Gamma)$ であり，任意の $k_x\in\mathscr{K}$ $(x\in\mathscr{H})$ に対して，

$$\langle K_t,k_x\rangle=\langle k_{\xi(t)},k_x\rangle=\langle\xi(t),x\rangle=k_x(t),\quad \forall t\in\Gamma.$$

（3）は $\mathscr{K}$ のつくり方から明らか．▌

この定理より，2次のモーメントをもつ確率過程 $\xi(t)$ の生成する Hilbert 空間は，$\xi(t)$ の共分散函数を再生核にもつRKHSに同型であることがわかった．

確率過程 $\xi(t)$ が実数値の場合，共分散函数 K_ξ も実数値となり，実 Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ で考えてよい．このとき，$\xi(t)$ の生成する実 Hilbert 空間は実のRKHS $\mathscr{H}(K_\xi)$ に同型である．

2.9 核函数 $K(s,t)=s\wedge t$

この節では，具体的な核函数 $K(s,t)=s\wedge t=\min\{s,t\}$ $(s,t\in[a,b]$；ただし $a\geqq 0$ とする）を取りあげ，核函数に関する前節までの一般論を適用してみよう．これは Brown 運動の共分散函数でもあり，興味ある重要な性質をもっている．これの函数解析的性質を調べることによって，さらにその有効性が明らかになる．

さて，$K\in C([a,b]\times[a,b])$ であり，K を核函数にもつ積分作用素 $\tilde{K}$ は $L^2(a,b)$ 上の正作用素であるから，Mercer の定理が適用できる．そこで，まず $[a,b]=[0,1]$ の場合に，$\tilde{K}$ の固有値展開を求めよう．

〈補題 2.31〉 積分作用素 $\tilde{K}\in \boldsymbol{S}(L^2(0,1))$ の固有値展開は，

$$\lambda_n=\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2,\quad x_n(t)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right),\quad n\in \boldsymbol{N}$$

によって，$\tilde{K}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n\otimes\bar{x}_n$ となる．

証明 積分作用素 $\tilde{K}$ の固有値と固有ベクトルを求めるには，積分方程式：

(1) $$\int_0^1 (t\wedge s)x(s)ds=\lambda x(t),\quad 0\leqq t\leqq 1$$

を考え，係数 λ (>0) とそのときの解 $x\in L^2(0,1)$ ($\|x\|_2=1$) を求めればよい．Mercer の定理より，$x\in C[0,1]$ としてよい．(1) は

$$\int_0^t sx(s)ds+t\int_t^1 x(s)ds=\lambda x(t),\quad 0\leqq t\leqq 1$$

と書き直せる．これより x は微分可能だから，両辺を微分して，

(2) $$\int_t^1 x(s)ds=\lambda x'(t),\quad 0\leqq t\leqq 1.$$

よって x' は再び微分可能で，両辺を微分すると，

$$-x(t)=\lambda x''(t),\quad 0\leqq t\leqq 1.$$

これの一般解は，

(3) $$x(t)=\alpha\sin(t/\sqrt{\lambda})+\beta\cos(t/\sqrt{\lambda}).$$

これから (1) の解を得るために，境界条件を求める．(1) と (2) より，$x(0)=x'(1)=0$. これと (3) より，$\beta=0$ で $x(t)=\alpha\sin(t/\sqrt{\lambda})$. $x'(t)=(\alpha/\sqrt{\lambda})\cos(t/\sqrt{\lambda})$ に $t=1$ を代入して，$\cos(1/\sqrt{\lambda})=0$. よって $1/\sqrt{\lambda}=(2n-1)\pi/2$, すなわち $\lambda=(2/(2n-1)\pi)^2$ ($n\in \boldsymbol{N}$). このとき，$\|x\|_2=1$ より $x(t)=\sqrt{2}\sin((2n-1)\pi t/2)$. したがって補題の結論を得る．▌

この補題と Mercer の定理より，直ちに次の系が成立する．

〈系 2.32〉

$$s\wedge t=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2(n-1)\pi}\right)^2\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}s\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right),\quad \forall s,t\in[0,1].$$

ここで，右辺の級数は $[0,1]\times[0,1]$ 上で一様収束する．

問 区間 [0, 1] を区間 [0, b] にする場合と，さらに一般に [a, b] にする場合，函数 $s\wedge t$ の展開式を導け．

次に，三たび確率過程の場合を考えよう．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値の確率変数 ξ が Gauss 型であるとは，$\mu\circ\xi^{-1}\ll dt$（=Lebesgue 測度）であり，Radon–Nikodym 微分が

$$\frac{\mu(\xi^{-1}(dt))}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられるときをいう．ここで，$m=E(\xi)=\int_\Omega \xi d\mu$，$\sigma^2=E(\xi^2)-m^2$ である．m を ξ の**平均値**（または**期待値**）といい，σ^2 を ξ の**分散**という．Ω 上の確率過程 $\xi(t)$ ($t\in\Gamma$) が **Gauss 過程**であるとは，$\{\xi(t)\,;\,t\in\Gamma\}$ からとった有限個の線形結合がすべて Gauss 型であるときをいう．Gauss 過程 $B(t)$ ($t\in[0,\infty)$) が **Brown 運動**（または **Wiener 過程**）であるとは，$E(B(t))=0$ ($\forall t\geqq 0$) かつその共分散函数 $K(s,t)$ ($=E(B(s)B(t))$) が $K(s,t)=s\wedge t$ ($\forall s,t\geqq 0$) で与えられるときをいう．これら Gauss 過程や Brown 運動については，函数解析の応用領域として興味ある理論が展開されるが，ここでは $K(s,t)=s\wedge t$ の核函数および再生核としての結果を述べるに留める．〈補題 2.31〉と〈定理 2.25〉の K–L 展開定理より，Brown 運動の K–L 展開が次のように得られる．

〈定理 2.33〉 Brown 運動の K-L 展開：Brown 運動 $B(t)$ ($t\in[0,1]$) は

$$B(t,\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty}(2\lambda_n)^{1/2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right)B_n(\cdot)$$

と展開される．ここで，右辺の級数は $t\in[0,1]$ について一様に $L^2(\Omega)$ 上のノルムで収束する．ただし，$\lambda_n=(2/(2n-1)\pi)^2$ であり，$\{B_n(\cdot)\}$ は $L^2(\Omega)$ における ONS で次の Bochner 積分で与えられる：

$$B_n(\cdot)=(2/\lambda_n)^{1/2}\int_0^1\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}t\right)B(t,\cdot)dt,\quad n\in\boldsymbol{N}.$$

最後に，核函数 $K(s,t)=s\wedge t$ ($s,t\in[a,b]\,;\,a\geqq 0$) を再生核にもつ RKHS $\mathcal{H}(K)$ を論じよう．閉区間 [a, b] 上の絶対連続な実数値函数の全体を

$AC[a,b]$ で表す（1.6 節 V 参照）．各 $x\in AC[a,b]$ は a.e. で導函数 $x'\in L^1(a,b)$ をもつが，$x'\in L^2(a,b)$ とは限らない．そこで，

$$AC^2[a,b]\equiv\{x\in AC[a,b]\ ;\ x'\in L^2(a,b)\}$$

とおく．$a>0$ のとき，各 $x,y\in AC^2[a,b]$ に対して，

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{a}x(a)y(a)+\int_a^b x'(t)y'(t)dt$$

と定めると，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $AC^2[a,b]$ 上の内積となり，$AC^2[a,b]$ は内積空間になる．このとき，

〈定理 2.34〉 $AC^2[a,b]$ $(a>0)$ は核函数 $K(s,t)=s\wedge t$ を再生核にもつ RKHS である．すなわち $AC^2[a,b]=\mathcal{H}(K)$．

証明 容易に，$K_t\in AC[a,b]$ であり，$K_t'(s)=1$ $(a\leqq s\leqq t)$，0 $(t<s\leqq b)$ であることがわかる．よって $K_t\in AC^2[a,b]$ $(\forall t\in[a,b])$ となる．任意の $x\in AC^2[a,b]$，$t\in[a,b]$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle K_t,x\rangle&=\frac{1}{a}K_t(a)x(a)+\int_a^b K_t'(s)x'(s)ds\\&=\frac{1}{a}ax(a)+\int_a^t x'(s)ds\\&=x(a)+x(t)-x(a)=x(t).\end{aligned}$$

そこで $AC^2[a,b]$ の完備性を示す．$\{x_n\}\subset AC^2[a,b]$ が Cauchy 列のとき，

$$\|x_m-x_n\|^2=\frac{1}{a}(x_m(a)-x_n(a))^2+\|x_m'-x_n'\|_2^2\to 0\quad(m,n\to\infty)$$

であるから，$y\in L^2(a,b)$ が存在して $\|x_n'-y\|_2\to 0$．ここで，

$$x(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(a)+\int_a^t y(s)ds,\quad a\leqq t\leqq b$$

とおくと，$x\in AC^2[a,b]$ かつ $x'=y$ a.e. であり，

$$\|x_n-x\|_2^2=\frac{1}{a}(x_n(a)-x(a))^2+\|x_n'-x'\|_2^2\to 0.$$

したがって $AC^2[a,b]$ は Hilbert 空間となり，定理の結論を得る．▌

註 上記の議論で，$a=0$ の場合は，$AC_0^2[0,b]\equiv\{x\in AC^2[0,b]\ ;\ x(0)=0\}$ をとり，内積を $\langle x,y\rangle=\int_0^b x'(t)y'(t)dt$ とすればよい．このとき，$AC_0^2[0,b]=\mathcal{H}(K)$．

この定理と〈定理 2.30〉より，Brown 運動 $B(t)$ $(t\in[a,b])$ の生成する実 Hilbert 空間 $(\subset L^2(\Omega))$ は RKHS $\mathcal{H}(K)=AC^2[a,b]$ ($a=0$ のときは

$AC_0{}^2[0, b]$) と同型である．この同型対応は $B(t) \longmapsto K_t$ ($t \in [a, b]$) によって定まる．

2.10 補　　節

無限次元空間上の測度と積分の理論は，興味ある研究対象である．特に，Hilbert 空間上の確率測度に関する議論は，函数解析と確率過程論の境界領域上にあり，函数解析的見地に立っても魅力あるテーマが山積している感がある．前節までの議論の展開からすれば，この章がそれを論ずる絶好の場所であると思われる．しかしながら，紙数の都合により，ここではその一端を一瞥するに留める．

この場合に，ベースとなるのは可分な実 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ であり，その上で $\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ を満たす確率 Borel 測度 μ を考える．この μ には，Riesz の定理を用いると，次のような正作用素 $R \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ が対応することがわかる：

$$\langle x, Ry \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle d\mu(z), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

特に，μ が Gauss 測度である場合に詳しく議論され，調和解析的な手法を用いて様々な結果が得られている．上の式を一見するだけで，この議論が Hilbert 空間固有の研究対象であるという認識が得られると思う．さらに，$\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度 μ と作用素 R の対応関係をきっかけに，作用素代数 $\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ と関連して興味あるテーマを論ずる可能性がある．詳しい議論は文献［29］などに譲って，この補節を終わりたい．

第3章 C* 代 数

この章では，C* 代数に関する一般的事項を説明する．まず，可換 Banach 代数の Gelfand 表現を説明し，C* 代数における最も基本的な定理である Gelfand–Naimark の表現定理を与える．これは可換 C* 代数が（局所）コンパクト空間上の連続函数のつくる C* 代数に同型であることを主張するものである．Gelfand 表現を使って，C* 代数の元の性質をそのスペクトル集合との関連で調べる．また，C* 代数の準同型写像の基本性質を与え，特に C* 代数の表現について詳しく説明する．さらに，C* 代数上の線形汎函数を議論し，特別な線形汎函数である状態のつくる空間の性質を調べる．最後に，C* 代数の状態による GNS 巡回表現を構成する．

3.1 可換代数の Gelfand-Naimark の表現定理

この節の主な目的は，I を含む可換 C* 代数はあるコンパクト Hausdorff 空間上の連続函数のつくる C* 代数に $*$ 同型であるという Gelfand–Naimark の表現定理を証明することにある．

いま，$\mathcal{A}$ を代数とし，$\mathcal{I}$ を $\mathcal{A}$ の両側イデアルとするとき，商空間 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ の元を $[A]\equiv A+\mathcal{I}=\{A+Q\,;\,Q\in\mathcal{I}\}$ $(A\in\mathcal{A})$ で表す．$\lambda[A]+\mu[B]=[\lambda A+\mu B]$，$[A][B]=[AB]$ と定めると，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は代数となる．さらに，$\mathcal{A}$ が $*$ 代数で $\mathcal{I}^*=\mathcal{I}$ のとき，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ における対合 $*$ を $[A]^*=[A^*]$ で定めると，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ も $*$ 代数となる．以下，代数 $\mathcal{A}$ は $I\in\mathcal{A}$ とし，$\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{I}$ は $\mathcal{I}\neq\mathcal{A}$ とする．

〈**補題 3.1**〉 $\mathcal{A}$ が Banach 代数で $\mathcal{I}$ が閉両側イデアルのとき，$[A]$ のノルムを $\|[A]\|\equiv\inf\{\|A+Q\|\,;\,Q\in\mathcal{I}\}$ で定めると，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ も Banach 代数である．

証明 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ がノルム空間になることは容易にわかる．$\{[A_n]\}$ を $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ の Cauchy 列

とすると，その部分列 $\{[A_{n_k}]\}$ で $\|[A_{n_{k+1}}]-[A_{n_k}]\|<1/2^k$ $(\forall k\in \boldsymbol{N})$ となるものがとれる．列 $\{B_k\}$ を $B_k\in[A_{n_{k+1}}-A_{n_k}]$, $\|B_k\|<1/2^k$ のように選ぶと，$\sum_{k=1}^{\infty}\|B_k\|<1$ だから，$B=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\in\mathcal{A}$ が存在する．$[A_{n_k}-A_{n_1}]=\left[\sum_{j=1}^{k-1}B_j\right]$ より，$\|[A_{n_k}]-[A_{n_1}+B]\|\leqq\left\|\sum_{j=1}^{k-1}B_j-B\right\|\to 0$ $(k\to\infty)$ となり，$\lim_{k\to\infty}[A_{n_k}]=[A_{n_1}+B]\in\mathcal{A}/\mathcal{I}$. よって $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は完備である．さらに，任意の $[A],[B]\in\mathcal{A}/\mathcal{I}$ に対して，$\|[A][B]\|=\|[AB]\|=\inf\{\|AB+Q\|;\ Q\in\mathcal{I}\}\leqq\inf\{\|(A+Q_1)(B+Q_2)\|;\ Q_1,Q_2\in\mathcal{I}\}\leqq\|[A]\|\|[B]\|$. また，$[I]$ が $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ の単位元となる．▌

イデアル $\mathcal{I}$ が**極大**であるとは，$\mathcal{I}\subsetneqq\mathcal{J}\subsetneqq\mathcal{A}$ となるイデアル $\mathcal{J}$ が存在しない場合をいう．なお，Zorn の補題より，代数 $\mathcal{A}$ の任意のイデアル $\mathcal{I}$ に対して，$\mathcal{I}$ を含む $\mathcal{A}$ の極大イデアルが常に存在する．

〈補題 3.2〉 $\mathcal{I}$ を Banach 代数 $\mathcal{A}$ のイデアルとする．

（1） $\mathcal{I}$ の閉包 $\overline{\mathcal{I}}$ は $\mathcal{A}$ のイデアルである．

（2） $\mathcal{I}$ が極大イデアルならば $\mathcal{I}=\overline{\mathcal{I}}$.

証明 （1）: $\mathcal{I}$ を左イデアルとする．任意の $A\in\mathcal{A}$ と $Q\in\overline{\mathcal{I}}$ に対して，$\|Q_n-Q\|\to 0$ となる列 $\{Q_n\}\subset\mathcal{I}$ をとると，$AQ_n\in\mathcal{I}$ で $\|AQ_n-AQ\|\leqq\|A\|\|Q_n-Q\|\to 0$ より，$AQ\in\overline{\mathcal{I}}$. そこで $I\notin\overline{\mathcal{I}}$ を示す．$\|A-I\|<1$ のとき，〈定理 1.10〉の（1）より A は可逆だから，$A\notin\mathcal{I}$. よって $\overline{\mathcal{I}}\subset\{A\in\mathcal{A};\ \|A-I\|\geqq 1\}$ となり，$I\notin\overline{\mathcal{I}}$. したがって $\overline{\mathcal{I}}$ は $\mathcal{A}$ の左イデアルである．$\mathcal{I}$ が右イデアルの場合も同様である．

（2）: $\mathcal{I}\subsetneqq\overline{\mathcal{I}}$ とすると，（1）より $\overline{\mathcal{I}}$ は $\mathcal{A}$ のイデアルだから，$\mathcal{I}$ の極大性に反する．▌

〈補題 3.3〉 $\mathcal{A}$ を可換代数とし，$\mathcal{I}$ を $\mathcal{A}$ のイデアルとするとき，$\mathcal{I}$ が極大であることと $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ が体であることは同値である．

証明 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ が体でないとすると，$[0]\neq[A]\in\mathcal{A}/\mathcal{I}$ が存在して $[A]$ は可逆でない．このとき，$\mathcal{J}=\{AB+Q;\ B\in\mathcal{A}, Q\in\mathcal{I}\}$ とおくと，$\mathcal{J}$ はイデアルで $\mathcal{I}\subsetneqq\mathcal{J}$. よって $\mathcal{I}$ は極大でない．逆に，$\mathcal{I}$ が極大でないとすると，$\mathcal{I}\subsetneqq\mathcal{J}$ であるイデアル $\mathcal{J}$ が存在する．$A\in\mathcal{J}\backslash\mathcal{I}$ をとると，$[A]\neq[0]$. いま，$[B]=[A]^{-1}\in\mathcal{A}/\mathcal{I}$ が存在するとすれば，$I\in AB+\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$ より，$\mathcal{J}=\mathcal{A}$ となり矛盾である．よって $[A]$ は可逆でないから，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は体でない．▌

〈補題 3.4〉 $\mathcal{A}$ が可換 Banach 代数で，$\mathcal{I}$ が $\mathcal{A}$ の極大イデアルであるとき，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は $\boldsymbol{C}$ に同型である．つまり $\mathcal{A}/\mathcal{I}=\boldsymbol{C}I$.

証明 〈補題 3.2〉の（2）と〈補題 3.1〉より，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は Banach 代数である．さらに，〈補題 3.3〉より，$\mathcal{A}/\mathcal{I}$ は体である．よって Gelfand-Mazur の定理より，$\mathcal{A}/\mathcal{I}=\boldsymbol{C}I$. ▌

［定義 3.1］ 可換代数 $\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{C}$ への恒等的には 0 でない準同型写像 χ を $\mathcal{A}$ の**指標**（character）という．

χ が可換代数 $\mathcal{A}$ の指標ならば，$\chi(I)=\chi(I)^2$ より $\chi(I)=1$ であり，また χ の核 $\ker\chi\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,\chi(A)=0\}$ は $\mathcal{A}$ の極大イデアルとなる．逆に，$\mathcal{A}$ が可換 Banach 代数で，$\mathcal{I}$ が $\mathcal{A}$ の極大イデアルならば，〈補題 3.4〉より $\mathcal{A}/\mathcal{I}=\boldsymbol{C}I$ であるから，準同型写像 $\chi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{I}\simeq\boldsymbol{C}$ は $\ker\chi=\mathcal{I}$ である $\mathcal{A}$ の指標となる．したがって，可換 Banach 代数において，指標の全体と極大イデアルの全体との間には 1 対 1 の対応がつくことがわかる．

〈補題 3.5〉 $\mathcal{A}$ が可換 Banach 代数のとき，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，次が成立する．

（1） $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\Longleftrightarrow$ 指標 χ が存在して $\chi(A)=\lambda$.

（2） すべての指標 χ に対して，$|\chi(A)|\leqq \mathrm{r}(A)\leqq\|A\|$.

証明 （1）：$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ のとき，$A-\lambda I$ は可逆でないから，$A-\lambda I$ はある極大イデアルに含まれる．したがって，ある指標 χ が存在して $\chi(A-\lambda I)=0$，つまり $\chi(A)=\lambda$. 逆に，ある指標 χ で $\chi(A)=\lambda$ のとき，$\chi(A-\lambda I)=0$ だから，$A-\lambda I$ は可逆でない．すなわち $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$.

（2）：（1）と $\sup\{|\lambda|\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}=\mathrm{r}(A)\leqq\|A\|$ より明らか．▌

可換 Banach 代数 $\mathcal{A}$ の指標の全体を**指標空間**，あるいは，**スペクトル空間**，**極大イデアル空間**などと呼び，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ で表す．任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ から $\boldsymbol{C}$ への函数 $\hat{A}$ を $\hat{A}(\chi)=\chi(A)$ （$\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$）で定める．

1.5 節で述べたように，Banach 代数 $\mathcal{A}$ の有界線形汎函数の全体からなる $\mathcal{A}$ の共役空間 $\mathcal{A}^*$ は，ノルム $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(A)|\,;\,A\in\mathcal{A},\|A\|\leqq1\}$ で Banach 空間になる．共役空間 $\mathcal{A}^*$ 上にはノルム位相の他に弱＊位相(i.e., $\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})$ 位相）が定義される．ネット $\{\varphi_j\}\subset\mathcal{A}^*$ が $\varphi\in\mathcal{A}^*$ に弱＊位相で収束するのは，$\varphi_j(A)\to\varphi(A)$ （$\forall A\in\mathcal{A}$）のときである．

〈**定理 3.6**〉 $\mathscr{A}$ が可換 Banach 代数のとき，次が成立する．

（1） $\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ は $\mathscr{A}^*$ の単位球面 $\{\varphi\in\mathscr{A}^*\,;\,\|\varphi\|=1\}$ に含まれる弱＊閉集合であり，ゆえに弱＊コンパクト Hausdorff 空間である．

（2） $\mathrm{ran}\,\hat{A}$ （$\hat{A}$ の値域）$=\mathrm{Sp}(A)$．

（3） $\hat{\mathscr{A}}\equiv\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{A}\}$ は $\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ の点を分離する (i.e.，$\hat{A}(\chi_1)=\hat{A}(\chi_2)$，$\forall A\in\mathscr{A}\Rightarrow\chi_1=\chi_2$)．

（4） $\wedge:\mathscr{A}\to C(\mathrm{Sp}(\mathscr{A}))$ （$\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ 上の連続函数の全体）は準同型写像で，$\|\hat{A}\|\equiv\sup\{|\hat{A}(\chi)|\,;\,\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{A})\}\leqq\|A\|$．

証明 （1）：〈補題 3.5〉より $|\chi(A)|\leqq\|A\|$ で $\chi(I)=1$ だから，$\|\chi\|=1$．また，ネット $\{\chi_j\}\subset\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ が $\chi\in\mathscr{A}^*$ に弱＊収束すれば，任意の $A,B\in\mathscr{A}$ に対して，

$$\chi(AB)=\lim_j\chi_j(AB)=\lim_j\chi_j(A)\chi_j(B)=\chi(A)\chi(B).$$

よって $\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$．したがって $\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ は弱＊閉であり，Banach–Alaoglu の定理より，$\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$ は弱＊コンパクト Hausdorff 空間である．

（2）は〈補題 3.5〉の（1）より明らか．（3）も明らか．

（4）：任意の $A,B\in\mathscr{A}$ に対して，$\widehat{AB}(\chi)=\chi(AB)=\chi(A)\chi(B)=\hat{A}(\chi)\hat{B}(\chi)$ より $\widehat{AB}=\hat{A}\hat{B}$．よって $\wedge$ は準同型写像である．また，〈補題 3.5〉の（1）より，$\|\hat{A}\|=\mathrm{r}(A)\leqq\|A\|$． ▌

上で与えた準同型写像 $\wedge:\mathscr{A}\to C(\mathrm{Sp}(\mathscr{A}))$ を可換 Banach 代数 $\mathscr{A}$ の **Gelfand 表現**という．ここで，$\mathscr{A}$ を可換 C* 代数とすると，次の重要な表現定理が導かれる．

〈**定理 3.7**〉 **Gelfand-Naimark の定理**：$\mathscr{A}$ が可換 C* 代数ならば，Gelfand 表現 $\wedge$ により $\mathscr{A}$ は $C(\mathrm{Sp}(\mathscr{A}))$ に等距離＊同型である．

この定理を証明する前に，簡単な注意を与えておこう．C* 代数 $\mathscr{A}$ の任意の元 A は，自己共役な $A_1=\dfrac{1}{2}(A+A^*)$ と $A_2=\dfrac{1}{2i}(A-A^*)$ により，$A=A_1+iA_2$ と表すことができ，さらに A が正規ならば，この A_1,A_2 は可換である．この事実から，C* 代数に関する様々な命題は，自己共役な元について証明すれば十分なことが多い．

〈定理 3.7〉の証明　$\mathcal{A}$ が可換 C* 代数であるから，任意の $A\in\mathcal{A}$ は正規であり，〈補題 1.12〉の（2）より $\|\hat{A}\|=\mathrm{r}(A)=\|A\|$．よって $\wedge$ は等距離写像である．さて，任意の $A=A^*\in\mathcal{A}$ に対して，$U_t=\exp(itA)=\sum_{n=0}^{\infty}(itA)^n/n!\in\mathcal{A}$ $(t\in\boldsymbol{R})$ と定めると，$U_t^*=U_{-t}$, $U_{-t}U_t=I$ が成立し，$U_t^*U_t=I$ つまり $\|U_t\|=1$ を得る．したがって，任意の $\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ に対して，〈補題 3.5〉の（2）より

$$1\geqq|\chi(U_t)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}(it\chi(A))^n/n!\right|=|\exp(it\chi(A))|,\quad \forall t\in\boldsymbol{R}$$

となるから，$\chi(A)\in\boldsymbol{R}$．証明の前に述べたように，任意の $A\in\mathcal{A}$ は $A=A_1+iA_2$, $A_k=A_k^*$ $(k=1,2)$ と書けて，

$$\widehat{A^*}(\chi)=\chi(A^*)=\chi(A_1)-i\chi(A_2)=\overline{\chi(A)}=\overline{\hat{A}(\chi)}.$$

よって $\widehat{A^*}=\hat{A}^*$ となり，$\wedge$ は * 準同型写像である．最後に，$\wedge$ が全射であることを示す．$\hat{\mathcal{A}}=\{\hat{A}\ ;\ A\in\mathcal{A}\}$ は $C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ の閉じた * 部分代数であり，〈定理 3.6〉の（3）より $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ の点を分離する．さらに，$1=\hat{I}\in\hat{\mathcal{A}}$．したがって，Stone-Weierstrass の定理より $\hat{\mathcal{A}}=C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$．▌

ここまでは $I\in\mathcal{A}$ の場合であったが，$I\notin\mathcal{A}$ の場合は，上記の定理は次のようになる．

〈系 3.8〉　$\mathcal{A}$ が I を含まない可換 C* 代数のとき，次が成立する．

（1）　$\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は弱 * 局所コンパクト Hausdorff 空間である．

（2）　$\mathcal{A}$ は $C_0(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ に等距離 * 同型である．

証明　次節の〈定理 3.9〉より，I を付加した C* 代数 $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+\boldsymbol{C}I$ が構成できる．この $\tilde{\mathcal{A}}$ に対して，〈定理 3.7〉より $\hat{\tilde{\mathcal{A}}}=C(\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}))$．さて，任意の $\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は，$\tilde{\chi}(A+\lambda I)=\chi(A)+\lambda$ $(A\in\mathcal{A},\lambda\in\boldsymbol{C})$ により，一意に $\tilde{\chi}\in\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}})$ に拡張される．ここで，$\tilde{\chi}_0\in\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}})$ を $\tilde{\chi}_0(A+\lambda I)=\lambda$ と定めると，$\chi\longmapsto\tilde{\chi}$ により $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は $\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}})\backslash\{\tilde{\chi}_0\}$ に位相同型であることがわかる．したがって $\mathrm{Sp}(\mathcal{A})$ は局所コンパクトであり，$\hat{\mathcal{A}}=\{\hat{A}\in\hat{\tilde{\mathcal{A}}}\ ;\ A\in\mathcal{A}\}=\{f\in C(\mathrm{Sp}(\tilde{\mathcal{A}}))\ ;\ f(\tilde{\chi}_0)=0\}$ は $C_0(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ に等距離 * 同型である．▌

3.2　C* 代数の元

まず，単位元 I を含まない C* 代数 $\mathcal{A}$ は常に I を含む C* 代数 $\tilde{\mathcal{A}}$ に拡張できることを示す．このことより，我々のとっている立場，すなわち I を含む C* 代数を考察の対象にしていることが自然なものであることがわかるであろう．しかし，$\mathcal{A}$ の中だけで議論したいときは，I の代わりに近似単位元（[定

義3.2］参照）を使う必要がある．

いま，$\tilde{\mathcal{A}}\equiv\mathcal{A}+\boldsymbol{C}I=\{A+\lambda I\,;\,A\in\mathcal{A},\lambda\in\boldsymbol{C}\}$ とおいて，積を $(A+\lambda I)(B+\mu I)=(AB+\mu A+\lambda B)+\lambda\mu I$，対合 $*$ を $(A+\lambda I)^*=A^*+\bar{\lambda}I$ で定めると，$\tilde{\mathcal{A}}$ が I を含む $*$ 代数になることは容易にわかる．さらに，

〈定理 3.9〉 I を含まない C* 代数 $\mathcal{A}$ に対して，$\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+\boldsymbol{C}I$ は，ノルム $\|A+\lambda I\|\equiv\sup\{\|AB+\lambda B\|\,;\,B\in\mathcal{A},\|B\|\leqq 1\}$ により，I を含む C* 代数となり，$\mathcal{A}$ は $\tilde{\mathcal{A}}$ の C* 部分代数である．

証明 $\|A+\lambda I\|$ は線形作用素 $B\in\mathcal{A}\longmapsto(A+\lambda I)B\in\mathcal{A}$ のノルムであるから，$\|(A+\lambda I)(B+\mu I)\|\leqq\|A+\lambda I\|\|B+\mu I\|$．また，$A\in\mathcal{A}$ のとき，$\|A\|$ が元のノルムに等しいこともすぐにわかる．いま，$\|A+\lambda I\|=0$ のとき，$\lambda\neq 0$ とすると，$\lambda=-1$ として一般性を失わないので $\|A-I\|=0$ としてよい．このとき，任意の $B\in\mathcal{A}$ に対して，$\|AB-B\|\leqq\|A-I\|\|B\|=0$ より $AB=B$．よって $AB=B=BA^*$ $(\forall B\in\mathcal{A})$．これより，$A=AA^*=A^*$ で，A は $\mathcal{A}$ の単位元となる．これは仮定に反する．したがって $\lambda=0$ となり，$A=0$．次に，C* ノルムの性質を示す．

$$\begin{aligned}\|A+\lambda I\|^2&=\sup\{\|AB+\lambda B\|^2\,;\,B\in\mathcal{A},\|B\|\leqq 1\}\\&=\sup\{\|B^*(A+\lambda I)^*(A+\lambda I)B\|\,;\,B\in\mathcal{A},\|B\|\leqq 1\}\\&\leqq\|(A+\lambda I)^*(A+\lambda I)\|\leqq\|(A+\lambda I)^*\|\|A+\lambda I\|.\end{aligned}$$

よって $\|A+\lambda I\|\leqq\|(A+\lambda I)^*\|$．逆も同様だから，$\|(A+\lambda I)^*\|=\|A+\lambda I\|$ かつ $\|(A+\lambda I)^*(A+\lambda I)\|=\|A+\lambda I\|^2$．最後に，$\tilde{\mathcal{A}}$ の完備性は，$\mathcal{A}$ と $\boldsymbol{C}$ の完備性から容易に示せる．∎

以下この節では，C* 代数 $\mathcal{A}(\ni I)$ の元の諸性質を見ていくことにする．

〈定理 3.10〉 任意の $A,B\in\mathcal{A}$ に対して，次が成立する．

（1） $\mathrm{Sp}(AB)\cup\{0\}=\mathrm{Sp}(BA)\cup\{0\}$ （ゆえに $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(BA)$）．

（2） $\mathrm{Sp}(A^*)=\{\bar{\lambda}\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$．

（3） A が可逆のとき，$\mathrm{Sp}(A^{-1})=\{\lambda^{-1}\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$．

証明 （1）：$\lambda\notin\mathrm{Sp}(AB)\cup\{0\}$ とすると，$C=(\lambda I-AB)^{-1}\in\mathcal{A}$．このとき，$C(\lambda I-AB)=I=(\lambda I-AB)C$ より，$ABC=CAB=\lambda C-I$．よって $(\lambda I-BA)(BCA+I)=\lambda I=(BCA+I)(\lambda I-BA)$ がわかる．したがって $(\lambda I-BA)^{-1}=\lambda^{-1}(BCA+I)\in\mathcal{A}$ となり，$\lambda\notin\mathrm{Sp}(BA)\cup\{0\}$．$A,B$ の対称性より，$\mathrm{Sp}(AB)\cup\{0\}=\mathrm{Sp}(BA)\cup\{0\}$ が示せた．

（2）は $(\lambda I-A)^*=\bar{\lambda}I-A^*$ より明らか．

（3）は $\lambda I-A=\lambda A(A^{-1}-\lambda^{-1}I)$ および $\lambda^{-1}I-A^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}(A-\lambda I)$ より明らか．∎

〈**定理 3.11**〉 $A\in\mathcal{A}$ に対して，次が成立する．

（1） A がユニタリーならば，$\mathrm{Sp}(A)\subset\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,|\lambda|=1\}$．

（2） $A=A^*$ ならば，$\mathrm{Sp}(A)\subset[-\|A\|,\|A\|]$．

（3） 任意の多項式 f に対して，$\mathrm{Sp}(f(A))=f(\mathrm{Sp}(A))$．

証明 （1）：$\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ に対して，$\|A\|=1$ だから $|\lambda|\leqq 1$．また，$\|A^{-1}\|=1$ だから，〈定理 3.10〉の（3）より $|\lambda^{-1}|\leqq 1$ もいえて，$|\lambda|=1$．

（2）：$\lambda=a+ib$ $(b\neq 0)$ のとき，$\lambda I-A=b(iI-b^{-1}(A-aI))$ であるから，$iI-A$ が可逆であることを示せばよい．いま，$iI-A$ が可逆でないとすると，任意の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，$i(iI-A)=(\lambda I-iA)-(\lambda+1)I$ より $\lambda+1\in\mathrm{Sp}(\lambda I-iA)$．ゆえに $|\lambda+1|\leqq\|\lambda I-iA\|$，すなわち，$(\lambda+1)^2\leqq\|\lambda I-iA\|^2=\|\lambda^2 I+A^2\|\leqq\lambda^2+\|A\|^2$． したがって $1+2\lambda\leqq\|A\|^2$ $(\forall\lambda\in\boldsymbol{R})$ となり，不合理である．よって $\mathrm{Sp}(A)\subset\boldsymbol{R}$．さらに，〈補題 3.5〉より $\mathrm{Sp}(A)\subset[-\|A\|,\|A\|]$．

（3）：互いに可換な $\{A_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{A}$ に対して， $B=\prod_{k=1}^n A_k$ とおくと，『B が可逆$\Longleftrightarrow$すべての A_k が可逆』が容易にわかる．いま，多項式 f と $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，$f(x)-\lambda$ を因数分解して $f(x)-\lambda=\mu\prod_{k=1}^n(x-\mu_k)$ $(\mu,\mu_k\in\boldsymbol{C})$ と書くと， $f(A)-\lambda I=\mu\prod_{k=1}^n(A-\mu_k I)$． したがって， 『$\lambda\in\mathrm{Sp}(f(A))\Longleftrightarrow$ある μ_k が $\mu_k\in\mathrm{Sp}(A)$』である． $f(\mu_k)=\lambda$ $(\forall k=1,\cdots,n)$ だから，『$\lambda\in\mathrm{Sp}(f(A))\Longleftrightarrow\lambda\in f(\mathrm{Sp}(A))$』が成立する．∎

代数 $\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{B}$ が I を含むとき， $A\in\mathcal{B}$ に対して，

$$\mathrm{Re}^{\mathcal{B}}(A)\equiv\{\lambda\in\boldsymbol{C}\,;\,(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{B}\text{ が存在する}\},$$

$$\mathrm{Sp}^{\mathcal{B}}(A)\equiv\boldsymbol{C}\backslash\mathrm{Re}^{\mathcal{B}}(A)$$

と定める．

〈**定理 3.12**〉 $\mathcal{B}(\ni I)$ が C* 代数 $\mathcal{A}$ の C* 部分代数であるとき，任意の $A\in\mathcal{B}$ に対して，$\mathrm{Sp}^{\mathcal{B}}(A)=\mathrm{Sp}^{\mathcal{A}}(A)$ $(\equiv\mathrm{Sp}(A))$．

証明 定義より，$\mathrm{Sp}(A)\subset\mathrm{Sp}^{\mathcal{B}}(A)$ である．逆を示すには，$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{A}$ ならば $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{B}$ を示せばよい． $B=\lambda I-A\in\mathcal{B}$ とおいて， $B^{-1}\in\mathcal{A}$ とする． $B=B^*$ の場合，〈定理 3.11〉の（2）より $\mathrm{Sp}^{\mathcal{B}}(B)\subset\boldsymbol{R}$． したがって，任意の ε $(\neq 0)\in\boldsymbol{R}$ に対して，$(B-i\varepsilon I)^{-1}\in\mathcal{B}$． 〈定理 1.10〉の（3）より $\|(B-i\varepsilon I)^{-1}-B^{-1}\|\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ で， $\mathcal{B}$ が C* 代数だから， $B^{-1}\in\mathcal{B}$． B が自己共役でない場合でも，$(B^*B)^{-1}\in\mathcal{A}$ より $(B^*B)^{-1}\in\mathcal{B}$ となり， $B^{-1}=(B^*B)^{-1}B^*\in\mathcal{B}$ を得る．∎

$A\in\mathcal{A}$ を正規な元として， I と A により生成される $\mathcal{A}$ の C* 部分代数を $\mathcal{A}_0$（これを $[\![I,A]\!]$ で表す）とおくと， $\mathcal{A}_0$ は可換 C* 代数である． Gelfand-Naimark の定理より， $\mathcal{A}_0$ は $C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0))$ に等距離 $*$ 同型である． さらに，

〈定理 3.6〉より $\chi\in\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0)\mapsto\chi(A)\in\mathrm{Sp}(A)$ は同位相写像であり，これは等距離＊同型写像 $\xi : C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0))\to C(\mathrm{Sp}(A))$ を引き起こす．したがって，$\zeta=\xi\circ\wedge$ により $\mathcal{A}_0$ は $C(\mathrm{Sp}(A))$ と同一視できる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\quad\zeta\quad} & C(\mathrm{Sp}(A)) \\ & {\scriptstyle\wedge}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\xi} & \\ & C(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}_0)) & \end{array}$$

各 $f\in C(\mathrm{Sp}(A))$ に対して，$\zeta(B)=f$ となる $B\in\mathcal{A}_0$ が対応するが，この B を $f(A)$ と書く．特に $f_0(\lambda)=\lambda$ $(\lambda\in\mathrm{Sp}(A))$ のとき，$f_0(\chi(A))=\chi(A)=\hat{A}(\chi)$ より，$f_0(A)=A$ となる．

問　正規な $A\in\mathcal{A}$ と $f\in C(\mathrm{Sp}(A))$ に対して，$\mathrm{Sp}(f(A))=f(\mathrm{Sp}(A))$ を示せ．

C* 代数 $\mathcal{A}$ の元 A が**正**であるとは，$A=A^*$ で $\mathrm{Sp}(A)\subset[0,\infty)$ のときをいう．このとき，$A\geqq 0$ と書く．以下，次の記号を用いる：$\mathcal{A}_{sa}\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,A=A^*\}$；$\mathcal{A}_+\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,A\geqq 0\}$．

〈定理 3.13〉　$\mathcal{A}_+$ は閉凸錐であり，$\mathcal{A}_+\cap(-\mathcal{A}_+)=\{0\}$．

証明　$A\in\mathcal{A}_+$ と $\lambda\geqq 0$ に対して，$\lambda A\in\mathcal{A}_+$ は明らか．したがって，$\mathcal{A}_{+,1}\equiv\{A\in\mathcal{A}_+\,;\,\|A\|\leqq 1\}$ が閉凸集合であることを示せばよい．$A\in\mathcal{A}_{sa}$, $\|A\|\leqq 1$ に対して，$\mathrm{Sp}(A)\subset[-1,1]$ だから，$A\geqq 0$ と $\|I-A\|$ $(=\sup\{1-\lambda\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\})\leqq 1$ は同値である．よって $\mathcal{A}_{+,1}$ は閉である．また，任意の $A, B\in\mathcal{A}_{+,1}$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ に対して，

$$\|I-\lambda A-(1-\lambda)B\|\leqq\lambda\|I-A\|+(1-\lambda)\|I-B\|\leqq 1$$

となるから，$\lambda A+(1-\lambda)B\in\mathcal{A}_{+,1}$．よって $\mathcal{A}_{+,1}$ は凸集合である．さらに，$A\in\mathcal{A}_+\cap(-\mathcal{A}_+)$ とすると，$\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$．したがって $\|A\|=\mathrm{r}(A)=0$ となり，$A=0$．▮

問　$A\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して，『$A\in\mathcal{A}_+\Longleftrightarrow\|\|A\|I-A\|\leqq\|A\|$』を示せ．

〈補題 3.14〉　任意の $A\in\mathcal{A}_+$ に対して，$B\in\mathcal{A}_+$ が一意に存在して $B^2=A$．

証明　$f_0, f\in C(\mathrm{Sp}(A))$ を $f_0(\lambda)=\lambda$, $f(\lambda)=\lambda^{1/2}$ と定める．$B=f(A)$ とすると，$B\in\mathcal{A}_+$ で，$f^2=f_0$ より $B^2=f_0(A)=A$．次に，一意性を示すために，別に $B_1\in\mathcal{A}_+$ で $B_1{}^2=A$ とする．$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda^2\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(B)\}=\{\lambda^2\,;\,\lambda\in\mathrm{Sp}(B_1)\}$ より，$\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(B_1)$．いま，

$\mathrm{Sp}(A)$ 上で $f(\lambda)=\lambda^{1/2}$ に一様収束する多項式の列 $\{g_n\}$ をとる．このとき，$\{g_n(\lambda^2)\}$ は $\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(B_1)$ 上で $f_0(\lambda)=\lambda$ に一様収束するから，$\|g_n(B^2)-B\|\to 0$ かつ $\|g_n(B_1{}^2)-B_1\|\to 0$. ところで，$g_n(B^2)=g_n(A)=g_n(B_1{}^2)$ だから，$B=B_1$ を得る．▌

この補題における B を $B=A^{1/2}$ と書く．なお，$A^{1/2}\in[\![I, A]\!]$ である．

$A\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して，$f_1, f_2\in C(\mathrm{Sp}(A))$ を $f_1(\lambda)=\max\{\lambda, 0\}$，$f_2(\lambda)=\max\{-\lambda, 0\}$ と定めると，$\lambda=f_1(\lambda)-f_2(\lambda)$ かつ $f_1(\lambda)f_2(\lambda)=0$ である．これより，

〈補題 3.15〉 任意の $A\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して，$B, C\in\mathcal{A}_+$ が存在して $A=B-C$ かつ $BC=0$. なお，この B, C は $[\![I, A]\!]$ に属する．

〈定理 3.16〉 $A\in\mathcal{A}$ に対して，次は同値である：（1）$A\in\mathcal{A}_+$；（2）$B\in\mathcal{A}$ が存在して $A=B^*B$.

証明 （1）⇒（2）は〈補題 3.14〉より明らか．

（2）⇒（1）：$A=B^*B\in\mathcal{A}_{sa}$ だから，〈補題 3.15〉より，$C, D\in\mathcal{A}_+$ が存在して $A=C-D$ かつ $CD=0$. したがって $D=0$ を示せばよい．$K=BD$ とおくと，

$$K^*K=DB^*BD=D(C-D)D=-D^3\leqq 0.$$

また，〈定理 3.10〉の（1）より，$\mathrm{Sp}(K^*K)\cup\{0\}=\mathrm{Sp}(KK^*)\cup\{0\}$ だから，$KK^*\leqq 0$ でもある．$K=H+iL$，$H, L\in\mathcal{A}_{sa}$ と書くと，$K^*K+KK^*=2H^2+2L^2$ より，$K^*K=2H^2+2L^2+(-KK^*)\geqq 0$. ゆえに $K^*K\in\mathcal{A}_+\cap(-\mathcal{A}_+)$ となり，〈定理 3.13〉より $K^*K=0$. よって $D=0$. ▌

2 つの元 $A, B\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して，『$B\leqq A \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} A-B\in\mathcal{A}_+$』と定める．この "$\leqq$" は $\mathcal{A}_{sa}$ における順序関係である．

〈定理 3.17〉 C* 代数 $\mathcal{A}$ の元 A, B, C に対して，次が成立する．

（1） $A\geqq B\geqq 0 \Longrightarrow \|A\|\geqq\|B\|$.

（2） $A\geqq 0 \Longrightarrow \|A\|A\geqq A^2$.

（3） $A\geqq B \Longrightarrow C^*AC\geqq C^*BC$.

（4） $A\geqq B\geqq 0 \Longrightarrow (A+\lambda I)^{-1}\leqq(B+\lambda I)^{-1}$，$\forall\lambda>0$.

（5） $A\geqq B\geqq 0 \Longrightarrow A^\alpha\geqq B^\alpha$，$\forall\alpha\in[0,1]$.

証明 （1）：〈定理 3.11〉の（2）より，$\mathrm{Sp}(\|A\|I-A)\subset[0,\infty)$. よって $\|A\|I\geqq A\geqq B\geqq 0$. ゆえに $\|A\|\geqq \mathrm{r}(B)=\|B\|$.

（2）：〈定理 3.11〉の（2）より，$\mathrm{Sp}(A-\|A\|I/2)\subset[-\|A\|/2, \|A\|/2]$. よって $\mathrm{Sp}((A$

$-\|A\|I/2)^2)\subset[0,\|A\|^2/4]$ となり，$(A-\|A\|I/2)^2\leqq\|A\|^2I/4$. ゆえに $\|A\|A\geqq A^2$.

(3)：〈定理 3.16〉より，$A-B=D^*D, D\in\mathcal{A}$ と書ける．よって $C^*AC-C^*BC=C^*D^*DC=(DC)^*(DC)\geqq 0$.

(4)：$\lambda>0$ のとき，$A+\lambda I\geqq B+\lambda I\geqq\lambda I$ より，$A+\lambda I$, $B+\lambda I$ は可逆である．(3)を使うと，$Q=(B+\lambda I)^{-1/2}(A+\lambda I)(B+\lambda I)^{-1/2}\geqq I$. $\mathrm{Sp}(Q)\subset[1,\infty)$ より $\mathrm{Sp}(Q^{-1})\subset(0,1]$ となり，$Q^{-1}\leqq I$. よって $(A+\lambda I)^{-1}=(B+\lambda I)^{-1/2}Q^{-1}(B+\lambda I)^{-1/2}\leqq(B+\lambda I)^{-1}$.

(5)：$\Delta=\{\alpha\geqq 0\,;\,A^\alpha\geqq B^\alpha\}$ とすると，Δ は閉集合で $0,1\in\Delta$ である．したがって，$\alpha,\beta\in\Delta$ ならば $(\alpha+\beta)/2\in\Delta$ を示せばよい．まず，A,B が可逆であるとすると，$A^{-\alpha/2}B^\alpha A^{-\alpha/2}\leqq I$, $A^{-\beta/2}B^\beta A^{-\beta/2}\leqq I$ となるから，$\|B^{\alpha/2}A^{-\alpha/2}\|\leqq 1$, $\|B^{\beta/2}A^{-\beta/2}\|\leqq 1$. よって，〈定理 3.10〉の(1)を使うと，

$$\begin{aligned}1&\geqq\|(A^{-\alpha/2}B^{\alpha/2})(B^{\beta/2}A^{-\beta/2})\|\geqq \mathrm{r}(A^{-\alpha/2}B^{(\alpha+\beta)/2}A^{-\beta/2})\\&=\mathrm{r}(A^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\alpha+\beta)/2}A^{-(\alpha+\beta)/4})=\|A^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\alpha+\beta)/2}A^{-(\alpha+\beta)/4}\|\end{aligned}$$

となるから，$A^{-(\alpha+\beta)/4}B^{(\alpha+\beta)/2}A^{-(\alpha+\beta)/4}\leqq I$. ゆえに $B^{(\alpha+\beta)/2}\leqq A^{(\alpha+\beta)/2}$ であり，$(\alpha+\beta)/2\in\Delta$. これで $[0,1]\subset\Delta$ が示せた．A,B が可逆でない場合でも，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A+\varepsilon I$, $B+\varepsilon I$ は可逆となるから，$(A+\varepsilon I)^\alpha\geqq(B+\varepsilon I)^\alpha$ $(\forall\alpha\in[0,1])$. $\varepsilon\to 0$ として，$A^\alpha\geqq B^\alpha$ $(\forall\alpha\in[0,1])$ を得る．∎

註　上の定理の(5)は $\alpha>1$ では成立しない．実際，ある $\alpha>1$ で(5)が常に成立するならば，$\mathcal{A}$ は可換である．

〈補題 3.18〉　C* 代数 $\mathcal{A}$ の任意の元は4つのユニタリーの線形結合で表せる．

証明　任意の $A\in\mathcal{A}$ は $A=A_1+iA_2$, $A_1, A_2\in\mathcal{A}_{sa}$ と書ける．ここで，$B_k=A_k/\|A_k\|$ $(k=1,2)$ とおくと，$\|B_k\|\leqq 1$. さらに，$U_k=B_k+i(I-B_k{}^2)^{1/2}$ とおくと，U_k はユニタリーであり，$A=\|A_1\|(U_1+U_1{}^*)/2+i\|A_2\|(U_2+U_2{}^*)/2$. ∎

ここで，C* 代数 $\mathcal{A}$ の単位球 $\mathcal{A}_1\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,\|A\|\leqq 1\}$ の端点に関して，いくつかの結果を記しておこう．

1°　$I\in\mathrm{ex}\,\mathcal{A}_1$. 実際，$\mathcal{A}_1$ が端点をもつことと $I\in\mathcal{A}$ は同値である．

2°　$\mathrm{ex}(\mathcal{A}_{+,1})=\{A\in\mathcal{A}\,;\,A^*=A=A^2\}$. ただし $\mathcal{A}_{+,1}=\mathcal{A}_+\cap\mathcal{A}_1$.

3°　$\mathrm{ex}\,\mathcal{A}_1=\{A\in\mathcal{A}\,;\,(I-AA^*)\mathcal{A}(I-A^*A)=\{0\}\}$.

この節の最後に，近似単位元について簡単に説明しておこう．

[定義 3.2]　(1)　Banach 代数 $\mathcal{A}$ の**近似単位元**とは，次の条件を満たすネット $\{E_j\}\subset\mathcal{A}$ である：$\lim_j\|E_jA-A\|=\lim_j\|AE_j-A\|=0$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

(2) $\mathcal{A}$ が C* 代数のときは,(1)の条件に加えて, $0 \leqq E_i \leqq E_j$ $(i \leqq j)$ および $\|E_j\| \leqq 1$ を満たすネット $\{E_j\}$ を近似単位元という.

近似単位元に関して,次の結果が知られている.

4° $\mathcal{A}$ が C* 代数のとき, $\{E \in \mathcal{A}_+ ; \|E\| < 1\}$ は $\mathcal{A}_{sa}$ における順序 "$\leqq$" に関して増大ネットとなり,さらに $\mathcal{A}$ の近似単位元となる.

5° $\mathcal{A}$ が可分な C* 代数のとき, $\mathcal{A}$ の近似単位元で点列であるものがとれる.

3.3 準同型写像と表現

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 2 つの C* 代数とし,それらの単位元をともに I で表すことにする.この節では, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への * 準同型写像 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (1.7 節参照) を考察する.特に $\mathcal{B} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき, * 準同型写像 $\pi : \mathcal{A} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}$ 上の表現と呼び, $\{\mathcal{H}, \pi\}$ で表す.これが最も重要な * 準同型写像である.

代数的に定義された * 準同型写像は,次の定理で示すように,ノルムに関する縮小写像でもある.

〈定理 3.19〉 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 2 つの C* 代数とし, $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を * 準同型写像とするとき,任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して,次が成立する:(1) $A \geqq 0 \Rightarrow \pi(A) \geqq 0$; (2) $\|\pi(A)\| \leqq \|A\|$.

証明 (1):〈定理 3.16〉より, $A \geqq 0$ に対して, $B \in \mathcal{A}$ が存在して $A = B^*B$. よって $\pi(A) = \pi(B)^*\pi(B) \geqq 0$.

(2):〈定理 3.17〉の (2) より, $\|A^*A\| A^*A \geqq (A^*A)^2 \geqq 0$. したがって (1) より, $\|A^*A\| \pi(A^*A) \geqq \pi(A^*A)^2 \geqq 0$, すなわち $\|A^*A\| \pi(A)^*\pi(A) \geqq (\pi(A)^*\pi(A))^2 \geqq 0$. 〈定理 3.17〉の (1) と C* 代数のノルムの性質より, $\|A\|^2 \|\pi(A)\|^2 \geqq \|\pi(A)\|^4$. よって $\|\pi(A)\| \leqq \|A\|$. ▌

〈定理 3.20〉 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が C* 代数のとき, * 準同型写像 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して,次は同値である:(1) π が忠実 (i.e., $\ker \pi = \{0\}$) ; (2) $\|\pi(A)\| = \|A\|$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

証明 (2)⇒(1) は明らか.

(1)⇒(2)：まず，$\mathscr{A},\mathscr{B}$がともに可換である場合で証明する．このとき，任意の指標$\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{B})$に対して，$\chi\circ\pi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$となるから，$\pi^*:\mathrm{Sp}(\mathscr{B})\to\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$を$\pi^*(\chi)=\chi\circ\pi$で定める．〈定理3.19〉より$\pi$は連続であり，$\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$および$\mathrm{Sp}(\mathscr{B})$上の位相は弱*位相であるから，$\pi^*$は連続写像となる．さらに，$\mathrm{Sp}(\mathscr{B})$はコンパクトだから，$\pi^*(\mathrm{Sp}(\mathscr{B}))\subset\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$もコンパクトであり，よって$\pi^*(\mathrm{Sp}(\mathscr{B}))$は閉集合である．いま，$\pi^*(\mathrm{Sp}(\mathscr{B}))\neq\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$とすると，ある$f(\neq 0)\in C(\mathrm{Sp}(\mathscr{A}))$が存在して$f(\chi)=0$ $(\forall\chi\in\pi^*(\mathrm{Sp}(\mathscr{B})))$．Gelfand–Naimarkの定理より，$f=\hat{A}$ $(0\neq A\in\mathscr{A})$と書ける．このとき，任意の$\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{B})$に対して，$\widehat{\pi(A)}(\chi)=\chi(\pi(A))=\hat{A}(\pi^*(\chi))=0$となるから，$\pi(A)=0$．これは$\pi$が忠実であることに反する．ゆえに$\pi^*(\mathrm{Sp}(\mathscr{B}))=\mathrm{Sp}(\mathscr{A})$．したがって，$\mathscr{A},\mathscr{B}$が可換であるから，

$$\begin{aligned}\|\pi(A)\|&=\mathrm{r}(\pi(A))=\sup\{|\chi(\pi(A))|\,;\,\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{B})\}\\&=\sup\{|\chi(A)|\,;\,\chi\in\mathrm{Sp}(\mathscr{A})\}=\mathrm{r}(A)=\|A\|.\end{aligned}$$

次に，$\mathscr{A},\mathscr{B}$が一般のC*代数の場合，$A\in\mathscr{A}_{sa}$に対して$\mathscr{A}_0=[\![I,A]\!]$, $\mathscr{B}_0=[\![\pi(I),\pi(A)]\!]$とおくと，$\mathscr{A}_0,\mathscr{B}_0$は可換C*代数であり，$\pi\upharpoonright\mathscr{A}_0$は当然$\mathscr{A}_0$から$\mathscr{B}_0$への*準同型写像となる．よって上の議論より，$\|\pi(A)\|=\|A\|$．任意の$A\in\mathscr{A}$に対しては，$\|\pi(A)\|^2=\|\pi(A^*A)\|=\|A^*A\|=\|A\|^2$より，$\|\pi(A)\|=\|A\|$． ▌

この定理から，C*代数$\mathscr{A}$上のノルムは一意に決まることがわかる．実際，$\mathscr{A}$が2つのノルム$\|\cdot\|_1$と$\|\cdot\|_2$をもったとする．このとき，写像$\pi:\{\mathscr{A},\|\cdot\|_1\}\to\{\mathscr{A},\|\cdot\|_2\}$を$\pi(A)=A$ $(A\in\mathscr{A})$で定めると，このπは*同型写像となるから，$\|A\|_1=\|\pi(A)\|_2=\|A\|_2$である．

註 本書では，忠実（i.e.，1対1）な*準同型写像$\pi:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$を*同型写像と呼び，全射であることは要求しない．

C*代数$\mathscr{A}$の表現$\{\mathscr{H},\pi\}$に対して，$\pi(\mathscr{A})\mathscr{L}\equiv\{\pi(A)x\,;\,A\in\mathscr{A},x\in\mathscr{L}\}\subset\mathscr{L}$を満たす$\mathscr{H}$の閉部分空間$\mathscr{L}$を$\mathscr{H}$の**不変部分空間**と呼ぶ．$\mathscr{L}$が$\mathscr{H}$の不変部分空間であるとき，$\mathscr{L}^\perp\equiv\{x\in\mathscr{H}\,;\,\langle x,y\rangle=0,\forall y\in\mathscr{L}\}$も$\mathscr{H}$の不変部分空間となることが容易にわかる．実際，任意の$A\in\mathscr{A}$と$x\in\mathscr{L}^\perp$に対して，$\langle\pi(A)x,\pi(B)y\rangle=\langle x,\pi(A^*B)y\rangle=0$ $(\forall B\in\mathscr{A},\forall y\in\mathscr{L})$であるから，$\pi(A)x\in\mathscr{L}^\perp$．

以下この節では，$I\in\mathscr{A}$は必ずしも仮定しない．表現$\{\mathscr{H},\pi\}$において，$\mathscr{H}$の閉部分空間の不変性に関する次の結果は有用である．

〈補題3.21〉 $\{\mathscr{H},\pi\}$をC*代数$\mathscr{A}$の表現とし，$\mathscr{L}$を$\mathscr{H}$の閉部分空間と

する．$\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への射影作用素を E とおくと，$\mathcal{L}$ が不変部分空間であることと $E\in\pi(\mathcal{A})'$ は同値である．

証明 $\mathcal{L}$ が不変部分空間のとき，任意の $A\in\mathcal{A}$，$x\in\mathcal{H}$ に対して，$\pi(A)Ex\in\mathcal{L}$ より $E\pi(A)Ex=\pi(A)Ex$ であり，$\pi(A)E^{\perp}x\in\mathcal{L}^{\perp}$ より $E\pi(A)E^{\perp}x=0$ である．よって $E\pi(A)x=E\pi(A)Ex+E\pi(A)E^{\perp}x=\pi(A)Ex$．したがって $E\pi(A)=\pi(A)E$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ となり，$E\in\pi(\mathcal{A})'$．逆に，$E\in\pi(\mathcal{A})'$ のとき，$\pi(\mathcal{A})\mathcal{L}=\pi(\mathcal{A})E\mathcal{H}=E\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}\subset\mathcal{L}$． ▌

以下，部分集合 $\mathcal{B}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{B}\mathcal{L}=\{Qx\ ;\ Q\in\mathcal{B}, x\in\mathcal{L}\}$ によって張られる $\mathcal{H}$ の閉部分空間を $[\![\mathcal{B}\mathcal{L}]\!]$ で表す．

いま，C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ に関して，$\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を

$$\mathcal{H}_1\equiv[\![\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]\!],\quad \mathcal{H}_2\equiv\{x\in\mathcal{H}\ ;\ \pi(A)x=0,\ \forall A\in\mathcal{A}\}$$

と定める．このとき，

〈補題 3.22〉 上記の $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対して，次が成立する．

（1） $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$.

（2） $I\in\mathcal{A}$ のとき，$\pi(I)$ は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_1$ への射影作用素である．

証明 （1）: $\mathcal{H}_1{}^{\perp}=\mathcal{H}_2$ を示せばよい．任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$(\mathrm{ran}\,\pi(A))^{\perp}=\ker\pi(A)^*=\ker\pi(A^*)$ であるから，$\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ の定義より，$\mathcal{H}_1{}^{\perp}=\cap\{\ker\pi(A^*)\ ;\ A\in\mathcal{A}\}=\mathcal{H}_2$.

（2）: $\pi(I)^*=\pi(I)=\pi(I^2)=\pi(I)^2$ より，$\pi(I)$ は射影作用素である．さらに，$\pi(I)\pi(A)x=\pi(A)x$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall x\in\mathcal{H})$ より，$\pi(I)\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_1$. $\pi(I)\mathcal{H}_2=\{0\}$ も明らか． ▌

［定義 3.3］ （1） C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ が**非縮退** (non-degenerate) 表現とは，$\mathcal{H}_2=\{0\}$ になる場合をいう．

（2） $\{\mathcal{H},\pi\}$ が**巡回** (cyclic) 表現とは，ある $x\in\mathcal{H}$ が存在して $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-=\mathcal{H}$ になる場合をいう．

上の定義（2）における x を $\pi(\mathcal{A})$ に関する**巡回ベクトル**という．$\mathcal{B}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，$x\in\mathcal{H}$ が $\mathcal{B}$ に関する**分離ベクトル**とは，任意の $Q\in\mathcal{B}$ に対して $Qx=0$ ならば $Q=0$ であるときをいう．

〈補題 3.23〉 C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ が $I\in\mathcal{A}$ で $\pi(I)=I$ のとき，$x\in$

$\mathcal{H}$ に対して，次は同値である．

（1） x は $\pi(\mathcal{A})$ に関する巡回ベクトル．

（2） x は $\pi(\mathcal{A})'$ に関する分離ベクトル．

証明 （1）⇒（2）：$Q\in\pi(\mathcal{A})'$ に対して $Qx=0$ とする．$Q\pi(\mathcal{A})x=\pi(\mathcal{A})Qx=0$ で $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-=\mathcal{H}$ より，$Q=0$.

（2）⇒（1）：$\mathcal{L}=\{\pi(\mathcal{A})x\}^-$ とおき，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への射影作用素を E とすると，〈補題 3.21〉より $E\in\pi(\mathcal{A})'$. $\pi(I)=I$ だから $x\in\mathcal{L}$ であり，$(I-E)x=0$. x が $\pi(\mathcal{A})'$ に関して分離的であるから，$E=I$. ▌

〈**補題 3.24**〉 C* 代数の巡回表現は非縮退である．

証明 $\{\mathcal{H},\pi\}$ を巡回表現とすると，ある $x\in\mathcal{H}$ が存在して，$\mathcal{H}=\{\pi(\mathcal{A})x\}^-\subset[\![\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]\!]=\mathcal{H}_1$ より，$\mathcal{H}_1=\mathcal{H}$. すなわち，$\mathcal{H}_2=\{0\}$. ▌

この補題の逆は，一般に成立しないことに注意しておこう．なお，$I\in\mathcal{A}$ で $\pi(I)=I$ を満たす $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ は，明らかに非縮退である．

〈**補題 3.25**〉 $\{\mathcal{H},\pi\}$ が C* 代数 $\mathcal{A}$ の非縮退表現であるとき，任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-$ は x を含む不変部分空間である．

証明 $\mathcal{L}=\{\pi(\mathcal{A})x\}^-$ とおくと，$\pi(\mathcal{A})\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ は明らか．E を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}$ への射影作用素とすると，〈補題 3.21〉より $E\in\pi(\mathcal{A})'$. ゆえに，$\pi(A)(I-E)x=(I-E)\pi(A)x=0$ $(\forall A\in\mathcal{A})$. ここで，$\{\mathcal{H},\pi\}$ が非縮退であるから，$(I-E)x=0$. つまり $x\in\mathcal{L}$. ▌

$\{\mathcal{H},\pi\}$ を C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現とするとき，任意の射影作用素 $E\in\pi(\mathcal{A})'$ に対して，$\mathcal{H}_0=E\mathcal{H}$，$\pi_0(A)=\pi(A)\restriction\mathcal{H}_0$ $(A\in\mathcal{A})$ と定めると，$\{\mathcal{H}_0,\pi_0\}$ も $\mathcal{A}$ の表現になる．この表現 $\{\mathcal{H}_0,\pi_0\}$ を $\{\mathcal{H},\pi\}$ の**部分表現**という．さらに，$\{\mathcal{H}_0,\pi_0\}$ が巡回表現（i.e.，$x\in\mathcal{H}_0$ が存在して $\{\pi_0(\mathcal{A})x\}^-=\mathcal{H}_0$）であるとき，$\{\mathcal{H}_0,\pi_0\}$ を**巡回部分表現**という．

〈**定理 3.26**〉 C* 代数 $\mathcal{A}$ の非縮退表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ は巡回部分表現の直和で表せる．

証明 部分集合 $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}\backslash\{0\}$ で，任意の $x,y\in\mathcal{L}$ $(x\neq y)$ に対して，$\{\pi(\mathcal{A})x\}^-\perp\{\pi(\mathcal{A})y\}^-$ を満たすものを考える．Zorn の補題より，このような部分集合で極大なものが存在する．それを $\mathcal{L}=\{x_j\,;\,j\in J\}$ とする．各 $j\in J$ に対して，$\mathcal{H}_j=\{\pi(\mathcal{A})x_j\}^-$ とおくと，〈補題 3.25〉より $\mathcal{H}_j$ は x_j を含む不変部分空間である．いま，$\mathcal{H}\supsetneqq\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}_j$ とす

ると，$0 \neq x \in \mathcal{H}$ が存在して $x \perp \mathcal{H}_j$ ($\forall j \in J$)．したがって $\{\pi(\mathcal{A})x\}^- \perp \mathcal{H}_j$ ($\forall j \in J$) となり，$\mathcal{L}$ の極大性に反する．ゆえに $\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$．ところで，$\pi_j(A) = \pi(A) \restriction \mathcal{H}_j$ ($A \in \mathcal{A}$) と定めると，$\{\mathcal{H}_j, \pi_j\}$ は $\{\mathcal{H}, \pi\}$ の巡回部分表現である．さらに，$\pi(A) = \bigoplus_{j \in J} \pi_j(A)$ ($\forall A \in \mathcal{A}$)．したがって $\{\mathcal{H}, \pi\} = \{\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j, \bigoplus_{j \in J} \pi_j\}$．▌

［**定義 3.4**］ C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H}, \pi\}$ が**既約** (irreducible) であるとは，$\mathcal{H}$ の不変部分空間が $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ だけのときをいう．

$\mathcal{A}$ が C* 代数でない場合は，上の表現を**位相的既約表現**といい，$\mathcal{H}$ の単なる（閉とは限らない）不変部分空間が $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ だけのとき，$\{\mathcal{H}, \pi\}$ を**代数的既約表現**といい，両者を区別する．しかし，C* 代数の場合は，この 2 つの概念は同じものになることが知られている．

表現の既約性に関して，よく使われる定理を証明しよう．

〈**定理 3.27**〉 C* 代数 $\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H}, \pi\}$ に対して，次は同値である．

（1） $\{\mathcal{H}, \pi\}$ は既約．

（2） $E \in \pi(\mathcal{A})'$ が射影作用素ならば，$E=0$ または I．

（3） $\pi(\mathcal{A})' = \boldsymbol{C}I$．

（4） 任意の $x (\neq 0) \in \mathcal{H}$ が巡回ベクトルであるか，または，$\pi(\mathcal{A}) = \{0\}$ かつ $\dim \mathcal{H} \leqq 1$．

証明 （1）⟺（2）は〈補題 3.21〉より明らか．（3）⇒（2）も明らか．

（2）⇒（4）：$\{\pi(\mathcal{A})x\}^- \subsetneqq \mathcal{H}$ となる x $(\neq 0) \in \mathcal{H}$ が存在したとする．$\mathcal{H}$ から $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-$ への射影作用素を E とおくと，$E \in \pi(\mathcal{A})'$ で $E \neq I$．よって（2）より，$E=0$．このとき，$x \in \mathcal{H}_2$ で $\mathcal{H}_2 \neq \{0\}$ となるから，（2）より $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$，つまり $\mathcal{H}_1 = \{0\}$．したがって，$\pi(\mathcal{A}) = \{0\}$ かつ $\dim \mathcal{H} \leqq 1$．

（4）⇒（3）：$\pi(\mathcal{A})' \neq \boldsymbol{C}I$ とすると，$Q \in \pi(\mathcal{A})'_{sa}$ が存在して $Q \notin \boldsymbol{C}I$．Q のスペクトル分解 $Q = \int_{-\|Q\|}^{\|Q\|} \lambda dE_\lambda$ をとると，スペクトル分解のつくり方から，$\{E_\lambda\} \subset \pi(\mathcal{A})'$．実際，任意のユニタリー作用素 $U \in \pi(\mathcal{A})''$ に対して，$\{UE_\lambda U^*\}$ もスペクトル測度で $Q = UQU^* = \int_{-\|Q\|}^{\|Q\|} \lambda d(UE_\lambda U^*)$．スペクトル分解の一意性から，$E_\lambda = UE_\lambda U^*$，すなわち $[E_\lambda, U] = 0$ ($\forall \lambda$)．〈補題 3.18〉より，$\pi(\mathcal{A})''$ の任意の元はユニタリー作用素の線形結合で表せるから，$\{E_\lambda\} \subset \pi(\mathcal{A})''' = \pi(\mathcal{A})'$．ところで，$Q \notin \boldsymbol{C}I$ より，ある λ で $E_\lambda \neq 0, I$．よって，$E_\lambda x = x$ となる $x (\neq 0) \in \mathcal{H}$ が存在して，$\{\pi(\mathcal{A})x\}^- = \{\pi(\mathcal{A})E_\lambda x\}^- = E_\lambda \{\pi(\mathcal{A})x\}^- \subsetneqq \mathcal{H}$．これは（4）に矛盾する．▌

3.4 状態とGNS構成定理

この節では，C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の線形汎函数の性質を調べ，特別な線形汎函数である $\mathcal{A}$ 上の状態に対して，GNS 表現を構成する．まず，C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の線形汎函数 $\varphi : \mathcal{A} \to \boldsymbol{C}$ に対して，次のように定義する．

[定義 3.5] （1） φ が**正**（**正値**） $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(A) \geqq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}_+$.

（2） φ が**自己共役** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(A) \in \boldsymbol{R},\ \forall A \in \mathcal{A}_{sa}$.

（3） φ が正のとき，φ が**忠実** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \varphi(A^*A)=0$ ならば $A=0$.

〈補題 3.28〉 （1） 正の線形汎函数 φ は自己共役である．

（2） 線形汎函数 φ が自己共役であることは，$\varphi(A^*)=\overline{\varphi(A)}$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ と同値である．

証明 （1）は上の定義と〈補題 3.15〉より明らか．

（2） φ が自己共役のとき，任意の $A \in \mathcal{A}$ を $A=A_1+iA_2$ $(A_1, A_2 \in \mathcal{A}_{sa})$ と表すと，$\varphi(A^*)=\varphi(A_1)-i\varphi(A_2)=\overline{\varphi(A)}$．逆も明らか． ▮

A の元の場合と同様，すべての線形汎函数 φ は，自己共役な 2 つの線形汎函数 φ_1, φ_2 により，$\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$ と表せる．実際，$\varphi^*(A)=\overline{\varphi(A^*)}$ $(A \in \mathcal{A})$ と定めて，$\varphi_1=\dfrac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)$，$\varphi_2=\dfrac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$ とおけばよい．

〈補題 3.29〉 Schwarz の不等式：φ が正の線形汎函数のとき，$|\varphi(A^*B)|^2 \leqq \varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$ $(\forall A, B \in \mathcal{A})$.

証明 $\langle A, B\rangle=\varphi(A^*B)$ $(A, B \in \mathcal{A})$ と定めると，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，『$\langle A, A\rangle=0 \Rightarrow A=0$』を除いてすべての内積の条件を満たす．よって，内積の場合（〈定理 1.1〉）と同様に，$|\varphi(A^*B)|^2=|\langle A, B\rangle|^2 \leqq \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle=\varphi(A^*A)\varphi(B^*B)$． ▮

〈定理 3.30〉 正の線形汎函数 φ は有界であり，$\|\varphi\|=\varphi(I)$.

証明 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，Schwarz の不等式より，$|\varphi(A)|^2 \leqq \varphi(I)\varphi(A^*A)$．さらに，$A^*A \leqq \|A^*A\|I=\|A\|^2 I$ より，$\varphi(A^*A) \leqq \|A\|^2\varphi(I)$．したがって $|\varphi(A)| \leqq \varphi(I)\|A\|$ となり，φ は有界である．また，$\|\varphi\|$ の定義より $\|\varphi\| \leqq \varphi(I)$．逆に，$\|I\|=1$ より $\|\varphi\| \geqq \varphi(I)$ となるから，$\|\varphi\|=\varphi(I)$． ▮

この定理の逆も次のように成立する.

〈定理 3.31〉 有界線形汎函数 $\varphi\in\mathcal{A}^*$ がある $A\in\mathcal{A}_+$, $\|A\|\leqq 1$ で $\varphi(A)=\|\varphi\|$ となるならば, φ は正である.

証明 $0\leqq A\leqq I$ だから, 任意の $\theta\in\boldsymbol{R}$ に対して, $\|A+e^{i\theta}(I-A)\|=\mathrm{r}(A+e^{i\theta}(I-A))\leqq 1$. ここで, θ を $e^{i\theta}\varphi(I-A)\geqq 0$ ととると, 仮定より, $\|\varphi\|\leqq\varphi(A)+e^{i\theta}\varphi(I-A)=\varphi(A+e^{i\theta}(I-A))\leqq\|\varphi\|$. よって $\varphi(I-A)=0$ となり, $\varphi(I)=\varphi(A)=\|\varphi\|$. φ を $\varphi/\|\varphi\|$ で置き換えてよいから, $\|\varphi\|=1$ としてよい. 任意の $B\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して, $\varphi(B)=a+ib$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$ とおく. 任意の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して, $|\varphi(B+i\lambda I)|=|a+i(b+\lambda)|\geqq|b+\lambda|$. ここで, $\mathrm{Sp}(B+i\lambda I)=\mathrm{Sp}(B)+i\lambda\subset\{t+i\lambda\,;\,t\in[-\|B\|,\|B\|]\}$ より, $\|B+i\lambda I\|=\mathrm{r}(B+i\lambda I)\leqq(\|B\|^2+\lambda^2)^{1/2}$, したがって, $\|\varphi\|=1$ より $(\|B\|^2+\lambda^2)^{1/2}\geqq|b+\lambda|$ $(\forall\lambda\in\boldsymbol{R})$ となるから, $b=0$. つまり $\varphi(B)\in\boldsymbol{R}$. さらに, $B\in\mathcal{A}_+$ のとき, $\|\|B\|I-B\|\leqq\|B\|$ であるから, $\|B\|-\varphi(B)=\varphi(\|B\|I-B)\leqq\|B\|$. ゆえに $\varphi(B)\geqq 0$. ▮

以下, C* 代数 $\mathcal{A}$ の共役空間 $\mathcal{A}^*$ の元で正なものの全体を $\mathcal{A}^*_+$ で表す. 明らかに, $\mathcal{A}^*_+$ は閉凸錐である.

$I\notin\mathcal{A}$ の場合, 近似単位元 $\{E_j\}$ をとると, 『$\varphi\in\mathcal{A}^*$ が正であることと $\lim_j\varphi(E_j)=\|\varphi\|$ が成立することは同値である』ことが示せる. さらに, この場合, $\mathcal{A}$ に I を付加した C* 代数 $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{A}+\boldsymbol{C}I$ (〈定理 3.9〉参照) をとると, 『任意の $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$ は, $\tilde{\varphi}(A+\lambda I)=\varphi(A)+\lambda\|\varphi\|$ $(A\in\mathcal{A},\lambda\in\boldsymbol{C})$ とおくことで, $\tilde{\varphi}\in\tilde{\mathcal{A}}^*_+$ に拡張できて $\|\tilde{\varphi}\|=\|\varphi\|$ を満たす.』

問 (1) $I\notin\mathcal{A}$ の場合, 上記の事柄を証明せよ.
(2) $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$ に対して, $|\varphi(A^*BA)|\leqq\varphi(A^*A)\|B\|$ を示せ.

$\|\varphi\|=1$ である $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$ を $\mathcal{A}$ 上の**状態**という. 状態は確率測度の非可換系への拡張ともみなし得るもので, 非可換系の力学を描くために重要なものである. $\mathcal{A}$ 上の状態の全体を $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ または単に $\mathfrak{S}$ で表すことにする.

$\varphi,\psi\in\mathcal{A}^*_+$ に対して, $\varphi-\psi\in\mathcal{A}^*_+$ のとき, φ は ψ を**押える** (dominate, majorize) といい, $\psi\leqq\varphi$ と書く.

$\varphi\in\mathfrak{S}$ が**純粋**であるとは, いかなる $\psi(\neq\varphi)\in\mathfrak{S}$ と $\lambda>0$ に対しても $\psi\leqq\lambda\varphi$ とならない場合をいう. 純粋状態の全体を $\mathfrak{S}_p$ で表す.

$\mathcal{A}^*$ の部分集合 $\mathcal{A}^*_{+,1}\equiv\{\varphi\in\mathcal{A}^*_+\,;\,\|\varphi\|\leqq 1\}$ に関して, 次の定理が基本的である.

〈**定理 3.32**〉（1）$\mathcal{A}^*_{+,1}$ は弱＊コンパクトな凸集合である．

（2）$\mathfrak{S}_p \cup \{0\} = \mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_{+,1}$（$\mathcal{A}^*_{+,1}$ の端点全体）．

証明　（1）：$\mathcal{A}^*_{+,1}$ が凸集合であることは明らか．これが弱＊位相で閉集合であることを示せば，Banach-Alaoglu の定理より，（1）が結論される．ネット $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{A}^*_{+,1}$ が $\varphi_j \to \varphi$（弱＊収束）とする．このとき，$\varphi \in \mathcal{A}^*_+$ は明らか．さらに，任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$|\varphi(A)| \leqq |\varphi_j(A)| + |\varphi_j(A) - \varphi(A)| \leqq \|A\| + |\varphi_j(A) - \varphi(A)|$ より，$|\varphi(A)| \leqq \|A\|$．よって $\|\varphi\| \leqq 1$ となり，$\varphi \in \mathcal{A}^*_{+,1}$．したがって $\mathcal{A}^*_{+,1}$ は弱＊閉である．

（2）：$\varphi \in \mathcal{A}^*_{+,1}$ かつ $-\varphi \in \mathcal{A}^*_{+,1}$ のとき，$\varphi(A) = 0$（$\forall A \in \mathcal{A}_+$）となり，$\mathcal{A}$ の任意の元は $\mathcal{A}_+$ の元の線形結合で表せるから，$\varphi = 0$．したがって $0 \in \mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_{+,1}$．$\varphi \in \mathfrak{S}_p$ のとき，$\varphi = \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$（$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}^*_{+,1}, 0 < \lambda < 1$）とする．このとき，$1 = \|\varphi\| = \lambda\|\varphi_1\| + (1-\lambda)\|\varphi_2\|$ で，$\|\varphi_1\| \leqq 1$，$\|\varphi_2\| \leqq 1$ であるから，$\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$．つまり $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{S}$．さらに，$\varphi_1 \leqq \lambda^{-1}\varphi$ となるから，$\varphi \in \mathfrak{S}_p$ より $\varphi_1 = \varphi$ を得る．よって $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$．ゆえに $\varphi \in \mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_{+,1}$．

逆に，$\varphi \in \mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_{+,1}$，$\varphi \neq 0$ とすると，明らかに $\|\varphi\| = 1$．つまり $\varphi \in \mathfrak{S}$．いま，$\varphi \notin \mathfrak{S}_p$ とすると，ある $\psi (\neq \varphi) \in \mathfrak{S}$ と $\lambda > 1$ が存在して $\psi \leqq \lambda\varphi$ となる．$\omega = (\lambda-1)^{-1}(\lambda\varphi - \psi)$ とおくと，$\omega \in \mathfrak{S}$ かつ $\varphi = \lambda^{-1}\psi + (1-\lambda^{-1})\omega$．これは $\varphi \in \mathrm{ex}\,\mathcal{A}^*_{+,1}$ に矛盾する．これで（2）が示せた．▌

この定理は $I \notin \mathcal{A}$ の場合でも成立するが，$\mathcal{A}$ 上の状態の空間に関しては状況が異なる．

〈**定理 3.33**〉$I \in \mathcal{A}$ のとき，次が成立する．

（1）$\mathfrak{S}$ は弱＊コンパクトな凸集合である．

（2）$\mathfrak{S}_p = \mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ かつ $\mathfrak{S} = \overline{\mathrm{co}}\ \mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$（$\mathrm{ex}\,\mathfrak{S}$ の弱＊閉凸包）．

証明　（1）：$I \in \mathcal{A}$ のとき，〈定理 3.30〉より $\mathfrak{S} = \{\varphi \in \mathcal{A}^*_+ ; \varphi(I) = 1\}$．これより，$\mathfrak{S}$ が凸集合で，かつ弱＊位相で閉集合であることがわかる．したがって，Banach-Alaoglu の定理より，$\mathfrak{S}$ は弱＊コンパクトである．

（2）：最初の式は，前定理の（2）と同様に示せる．後の式は，Krein-Milman の定理より得られる．▌

註　一般の場合，『$\mathfrak{S}$ が弱＊コンパクトであることは，$I \in \mathcal{A}$ であることと同値である』ことがわかっている．

C* 代数 $\mathcal{A}$ およびその上の状態で描かれる系の力学的変化（時間変化など）を議論するために，ある位相群 G（$G = \boldsymbol{R}$ など）の $\mathcal{A}$ 上の作用を導入する必要がある．

［**定義 3.6**］（1） C* 代数 $\mathcal{A}$ からそれ自身の上への＊同型写像を $\mathcal{A}$ の＊**自己同型写像**という．$\mathcal{A}$ の＊自己同型写像の全体を Aut ($\mathcal{A}$) で表し，$\mathcal{A}$ の＊**自己同型群**（これが群になることは明らか）と呼ぶ．

（2） 群 G から Aut($\mathcal{A}$) への準同型写像 α (i.e., $\alpha_{g_1g_2}=\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}$, $\forall g_1, g_2 \in G$) を G の $\mathcal{A}$ 上の**作用**という．

（3） 位相群 G の $\mathcal{A}$ 上の作用 α が**強連続**であるとは，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して $\|\alpha_g(A)-A\|\to 0$ $(g\to e)$ のときをいう．

C* 代数 $\mathcal{A}$ 上に上記の作用 α が与えられたとき，$\alpha(G)\equiv\{\alpha_g\,;\,g\in G\}$ とおくと，非可換な力学系は3つ組（$\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(G)$）で記述されることになる．3つ組（$\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(G)$）または（$\mathcal{A}, G, \alpha$）を **C* 力学系**と呼ぶ．ところで，Hilbert 空間上の作用素を使って力学系を論じる方法は，不完全ながらも幾多の成功を収めている．したがって，C* 代数による一般的記述から何らかの仕方でHilbert 空間による記述が導ければ都合がよい．これを保証するのが，次に述べる Gelfand–Naimark–Segal の構成定理である．

定理に入る前に，2, 3 の定義を与えておこう．$\varphi\in\mathfrak{S}$ が作用 α に関して**不変**（α-不変）であるとは，$\varphi\circ\alpha_g=\varphi$ $(\forall g\in G)$，すなわち $\varphi(\alpha_g(A))=\varphi(A)$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall g\in G)$ が成立する場合をいう．G からある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素の全体への準同型写像 $g\mapsto U_g$ (i.e., $U_{g_1g_2}=U_{g_1}U_{g_2}$, $\forall g_1, g_2\in G$) を G の $\mathcal{H}$ 上の**ユニタリー表現**という．このユニタリー表現が連続であるとは，任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して $\|(U_g-I)x\|\to 0$ $(g\to e)$ のときをいう．

問 U_g がユニタリー表現のとき，$U_e=I$（e は G の単位元），$U_{g^{-1}}=U_g{}^*$ を示せ．さらに，任意の $x, y\in\mathcal{H}$ に対して $\langle x, (U_g-I)y\rangle\to 0$ $(g\to e)$ ならば，U_g が連続であることを示せ．

〈**定理 3.34**〉 **GNS 構成定理（巡回表現定理）**：C* 代数 $\mathcal{A}$ 上の任意の状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，$\mathcal{A}$ の巡回表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi\}$ とその巡回ベクトル $x_\varphi\in\mathcal{H}_\varphi$ が存在して $\varphi(A)=\langle x_\varphi, \pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$．さらに，この $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ はユニタリー同値性を除いて一意である．

〈定理 3.35〉 α を G の $\mathcal{A}$ 上の強連続な作用とするとき，$\varphi\in\mathfrak{S}$ が α-不変ならば，G の $\mathcal{H}_\varphi$ 上の連続なユニタリー表現 $U_g{}^\varphi$ が一意に存在して $U_g{}^\varphi x_\varphi=x_\varphi$ $(\forall g\in G)$ かつ $\pi_\varphi(\alpha_g(A))=U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)U_g{}^{\varphi*}$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall g\in G)$.

［定義 3.7］ 上の定理で与えた3つ組 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ (φ が α-不変のときは，4つ組 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi, U_g{}^\varphi\}$) を φ による $\mathcal{A}$ の **GNS 表現**という．

〈定理 3.34〉の証明 $\mathcal{I}_\varphi=\{B\in\mathcal{A}\,;\,\varphi(A^*B)=0,\ \forall A\in\mathcal{A}\}$ とおくと，これは $\mathcal{A}$ の閉左イデアルである．よって商空間 $\mathcal{A}_\varphi=\mathcal{A}/\mathcal{I}_\varphi$ は線形空間になる．$\mathcal{A}_\varphi$ の元を $[A]=A+\mathcal{I}_\varphi$ $(A\in\mathcal{A})$ で表す．ここで，各 $[A],[B]\in\mathcal{A}_\varphi$ に対して，$\langle[A],[B]\rangle=\varphi(A^*B)$ と定める． $A_1\in[A]$, $B_1\in[B]$ のとき， $\varphi(A^*B)=\varphi(A^*B_1)=\overline{\varphi(B_1{}^*A)}=\overline{\varphi(B_1{}^*A_1)}=\varphi(A_1{}^*B_1)$ となるから，$\langle[A],[B]\rangle$ は $[A],[B]$ の代表元のとり方に無関係に定まる．$\langle[A],[A]\rangle=\varphi(A^*A)=0$ ならば，Schwarz の不等式より $A\in\mathcal{I}_\varphi$，つまり $[A]=0$ となる．したがって $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{A}_\varphi$ 上の内積となる．$\mathcal{A}_\varphi$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で完備化して得られる Hilbert 空間を $\mathcal{H}_\varphi$ とする．次に，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}_\varphi$ 上の線形作用素 $\pi_\varphi(A)$ を $\pi_\varphi(A)[B]=[AB]$ で定める．

$$\|\pi_\varphi(A)[B]\|=\varphi(B^*A^*AB)^{1/2}\leqq\|A\|\varphi(B^*B)^{1/2}=\|A\|\|[B]\|$$

より，$\pi_\varphi(A)$ は $\mathcal{A}_\varphi$ 上で有界である．$\overline{\mathcal{A}_\varphi}=\mathcal{H}_\varphi$ だから，$\pi_\varphi(A)$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ の元（これを同じ $\pi_\varphi(A)$ で書く）に一意に拡張される．任意の $A, B, C\in\mathcal{A}$ に対して，

$$\pi_\varphi(\lambda A+\mu B)[C]=[(\lambda A+\mu B)C]=(\lambda\pi_\varphi(A)+\mu\pi_\varphi(B))[C],$$

$$\pi_\varphi(AB)[C]=[ABC]=\pi_\varphi(A)\pi_\varphi(B)[C],$$

$$\langle[B],\pi_\varphi(A^*)[C]\rangle=\varphi(B^*A^*C)=\langle\pi_\varphi(A)[B],[C]\rangle=\langle[B],\pi_\varphi(A)^*[C]\rangle.$$

したがって，$\overline{\mathcal{A}_\varphi}=\mathcal{H}_\varphi$ だから，

$$\pi_\varphi(\lambda A+\mu B)=\lambda\pi_\varphi(A)+\mu\pi_\varphi(B),\ \pi_\varphi(AB)=\pi_\varphi(A)\pi_\varphi(B),\ \pi_\varphi(A^*)=\pi_\varphi(A)^*$$

となり，π_φ が $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}_\varphi$ 上の表現であることがわかる．さて，$x_\varphi=[I]\in\mathcal{H}_\varphi$ とおくと，$\pi_\varphi(A)x_\varphi=[A]$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ より $\{\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi\}^-=\mathcal{H}_\varphi$ となる． よって x_φ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ に関する巡回ベクトルであり，さらに $\varphi(A)=\langle[I],[A]\rangle=\langle x_\varphi,\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ が成立する．

最後に，3つ組 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ がユニタリー同値性を除いて一意であることを示そう．別に，巡回表現 $\{\mathcal{H},\pi,x\}$ が存在して $\varphi(A)=\langle x,\pi(A)x\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ とする．$\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2=\varphi(A^*A)=\|\pi(A)x\|^2$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ より，$\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi$ から $\pi(\mathcal{A})x$ への等距離作用素 V が存在して $V\pi_\varphi(A)x_\varphi=\pi(A)x$ $(\forall A\in\mathcal{A})$．$\{\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi\}^-=\mathcal{H}_\varphi$ かつ $\{\pi(\mathcal{A})x\}^-=\mathcal{H}$ だから，V は $\mathcal{H}_\varphi$ から $\mathcal{H}$ の上への等距離作用素（i.e., ユニタリー作用素）に一意に拡張される．このとき，$x=Vx_\varphi$ かつ $\pi(A)=V\pi_\varphi(A)V^*$ $(\forall A\in\mathcal{A})$． すなわち， 2つの巡回表現はユニタリー同値である． ▌

〈定理 3.35〉の証明 任意の $A, B\in\mathcal{A}$ と $g\in G$ に対して,

$$\langle[\alpha_g(A)],[\alpha_g(B)]\rangle=\varphi(\alpha_g(A^*B))=\varphi(A^*B)=\langle[A],[B]\rangle.$$

よって, $\mathcal{H}_\varphi$ 上のユニタリー作用素 $U_g{}^\varphi$ が存在して $U_g{}^\varphi[A]=[\alpha_g(A)]$ $(\forall A\in\mathcal{A})$. 任意の $g_1, g_2\in G$ に対して, $U_{g_1g_2}{}^\varphi[A]=[\alpha_{g_1g_2}(A)]=U_{g_1}{}^\varphi[\alpha_{g_2}(A)]=U_{g_1}{}^\varphi U_{g_2}{}^\varphi[A]$ より $U_{g_1g_2}{}^\varphi=U_{g_1}{}^\varphi U_{g_2}{}^\varphi$. よって $U_g{}^\varphi$ は G の $\mathcal{H}_\varphi$ 上のユニタリー表現であり, $U_g{}^\varphi x_\varphi=[\alpha_g(I)]=x_\varphi$ $(\forall g\in G)$. また,

$$\begin{aligned}U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)U_g{}^{\varphi*}[B]&=U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)[\alpha_{g^{-1}}(B)]=[\alpha_g(A\alpha_{g^{-1}}(B))]\\&=[\alpha_g(A)B]=\pi_\varphi(\alpha_g(A))[B]\end{aligned}$$

より, $\pi_\varphi(\alpha_g(A))=U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)U_g{}^{\varphi*}$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall g\in G)$. さらに, 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|(U_g{}^\varphi-I)[A]\|&=\|(U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)U_g{}^{\varphi*}-\pi_\varphi(A))x_\varphi\|\\&=\|\pi_\varphi(\alpha_g(A)-A)x_\varphi\|\leqq\|\alpha_g(A)-A\|\to 0\quad(g\to e).\end{aligned}$$

したがって, ユニタリー表現 $U_g{}^\varphi$ は連続である. 最後に, $U_g{}^\varphi$ の一意性は, $U_g{}^\varphi$ が $U_g{}^\varphi\pi_\varphi(A)x_\varphi=\pi_\varphi(\alpha_g(A))x_\varphi$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ を満たさなければならないことより明らか. ▌

状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ と GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ との関連において, 次の定理は非常に有用である.

〈定理 3.36〉 $\varphi, \psi\in\mathfrak{S}$ のとき, 次は同値である.

(1) ある $\lambda>0$ が存在して, $\psi\leqq\lambda\varphi$.

(2) $T\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'_+$ が(一意に)存在して, $\psi(A)=\langle x_\varphi, T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ $(\forall A\in\mathcal{A})$.

証明 (1)⇒(2):任意の $A, B\in\mathcal{A}$ に対して, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}|\psi(A^*B)|^2&\leqq\psi(A^*A)\psi(B^*B)\leqq\lambda^2\varphi(A^*A)\varphi(B^*B)\\&=\lambda^2\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2\|\pi_\varphi(B)x_\varphi\|^2.\end{aligned}$$

よって, 写像 $(\pi_\varphi(A)x_\varphi, \pi_\varphi(B)x_\varphi)\in\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi\times\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi\longmapsto\psi(A^*B)\in\boldsymbol{C}$ は有界な双線形汎函数となる. これは $\mathcal{H}_\varphi\times\mathcal{H}_\varphi$ 上の有界な双線形汎函数に一意に拡張される. したがって 1.3 節 1° より, $T\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_\varphi)$ が存在して $\psi(A^*B)=\langle\pi_\varphi(A)x_\varphi, T\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle$ $(\forall A, B\in\mathcal{A})$. $T\geqq 0$ は明らか. さらに, 任意の $A, B, C\in\mathcal{A}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle\pi_\varphi(B)x_\varphi, T\pi_\varphi(A)\pi_\varphi(C)x_\varphi\rangle&=\psi(B^*AC)=\psi((A^*B)^*C)\\&=\langle\pi_\varphi(A^*)\pi_\varphi(B)x_\varphi, T\pi_\varphi(C)x_\varphi\rangle\\&=\langle\pi_\varphi(B)x_\varphi, \pi_\varphi(A)T\pi_\varphi(C)x_\varphi\rangle\end{aligned}$$

となるから, $T\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ を得る. また, T の一意性は $\{\pi_\varphi(\mathcal{A})x_\varphi\}^-=\mathcal{H}_\varphi$ よりすぐにわかる.

(2)⇒(1):$\psi(A^*A)=\langle x_\varphi, T\pi_\varphi(A^*A)x_\varphi\rangle=\langle\pi_\varphi(A)x_\varphi, T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$
$\leqq\|T\|\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2=\|T\|\varphi(A^*A)$ より, $\psi\leqq\|T\|\varphi$. ▌

〈**系 3.37**〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，$\varphi\in\mathfrak{S}_p$ であることは，$\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi\}$ が既約であることと同値である．

証明 〈定理 3.36〉より，$\varphi\in\mathfrak{S}_p$ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})'=\boldsymbol{C}I$ と同値になる．したがって〈定理 3.27〉より，この系を得る．▌

〈**系 3.38**〉 $\mathcal{A}$ が可換 C* 代数のとき，$\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，$\varphi\in\mathfrak{S}_p$ は $\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ $(\forall A,B\in\mathcal{A})$ が成立することと同値である．

証明 $\mathcal{A}$ が可換のとき，$\pi_\varphi(\mathcal{A})\subset\pi_\varphi(\mathcal{A})'$ より，$\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi\}$ が既約であることは $\dim\mathcal{H}_\varphi=1$ と同値である．また，簡単な計算から，$\dim\mathcal{H}_\varphi=1$ と $\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ $(\forall A,B\in\mathcal{A})$ とは同値であることがわかる．▌

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の一様位相（i.e.，ノルム位相）で閉じた＊部分代数は C* 代数となるが，これを**作用素 C* 代数**または**具体的な C* 代数**と呼ぶ．

$\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実のとき，$\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi\}$ は忠実表現となる．実際，$\pi_\varphi(A)=0$ ならば，$\varphi(A^*A)=\langle x_\varphi,\pi_\varphi(A^*A)x_\varphi\rangle=\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2=0$ より $A=0$ となる．したがって $\mathcal{A}$ は $\mathcal{H}_\varphi$ 上の作用素 C* 代数に忠実に表現される．

問 可分な C* 代数は忠実な状態をもつことを証明せよ．

一般の C* 代数に対しても，次の定理が成立する．

〈**定理 3.39**〉 **Gelfand-Naimark の定理**：任意の C* 代数 $\mathcal{A}$ は，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素 C* 代数に忠実に表現される．

証明 各 $\varphi\in\mathfrak{S}$ による $\mathcal{A}$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ をとり，これらすべてを直和した表現 $\{\mathcal{H},\pi\}=\{\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\mathcal{H}_\varphi,\ \bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi\}$ を考える．これは $\pi(A)=\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi(A)$ $(A\in\mathcal{A})$ により定まる．いま，$\pi(A)=0$ とすると，$\pi_\varphi(A)=0$ $(\forall\varphi\in\mathfrak{S})$．よって $\varphi(A^*A)=\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2=0$ $(\forall\varphi\in\mathfrak{S})$．このとき，$A=0$ となることを示そう．$A\neq0$ とすると，$\|A\|=1$ として一般性を失わない．Hahn-Banach の定理より，$\varphi\in\mathcal{A}^*$ が存在して $\|\varphi\|=1$ かつ $\varphi(A^*A)=\|A^*A\|=1$．〈定理 3.31〉より，$\varphi\in\mathcal{A}^*_+$ となり $\varphi\in\mathfrak{S}$．これは矛盾である．ゆえに $A=0$ となり，π が忠実であることが示せた．▌

註 上の証明で与えた $\{\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\mathcal{H}_\varphi,\ \bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi\}$ を $\mathcal{A}$ の**全**（universal）**表現**という．v.N. 代数 $(\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi)(\mathcal{A})''$ を $\mathcal{A}$ の**包絡**（enveloping）**v.N. 代数**と呼び，これを単に $\mathcal{A}''$ で書くことが多い．$\mathcal{S}\subset\mathfrak{S}$ が『$\varphi(A^*A)=0$ $(\forall\varphi\in\mathcal{S})\Rightarrow A=0$』を満たすならば，上の証明で $\mathfrak{S}$ の代わりに $\mathcal{S}$ を用いてよい．

第4章　von Neumann 代数

この章では，von Neumann 代数（以下 v.N. 代数と略記する）に関する一般的事項を説明する．まず，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の局所凸位相として7種のものを導入する．$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数上の線形汎函数について様々な性質を調べた後，von Neumann の稠密定理と Kaplansky の稠密定理を述べる．また，v.N. 代数および C* 代数のテンソル積も説明する．次いで，v.N. 代数に含まれる射影作用素の性質をまとめ，それを使って v.N. 代数をいくつかの型に分類する．すべての v.N. 代数はⅠ型，Ⅱ型，Ⅲ型 v.N. 代数の直和に分解されるので，v.N. 代数の研究はⅠ,Ⅱ,Ⅲ型 v.N. 代数の究明に帰せられる．Ⅰ,Ⅱ型 v.N. 代数についてはやや詳しく議論し，Ⅰ型 v.N. 代数は本質的には $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ そのものであることが示される．さらに，半有限型（i.e.，Ⅰ型＋Ⅱ型）v.N. 代数には半有限正規トレースが存在することが示される．なお，Ⅲ型 v.N. 代数については，第7章で本格的に議論される．

4.1　$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の位相

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の局所凸位相として以下の7種のものが重要である．$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のネット $\{A_\alpha\}$ が $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に収束するものとして位相 τ（i.e.，$\alpha\to$“∞”のとき，$A_\alpha\xrightarrow{\tau}A$）を導入する．

［**定義 4.1**］（1）　**一様（またはノルム）位相**（τ^u で表す）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\|A_\alpha-A\|\to 0$.（これを $A_\alpha\xrightarrow{u}A$ と書く．）

（2）　**強（作用素）位相**（τ^s）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\|(A_\alpha-A)x\|\to 0$, $\forall x\in\mathcal{H}$.（$A_\alpha\xrightarrow{s}A$ と書く．）

（3）　**弱（作用素）位相**（τ^w）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}|\langle x,(A_\alpha-A)y\rangle|\to 0$, $\forall x,y\in\mathcal{H}$.（$A_\alpha\xrightarrow{w}A$ と書く．）

（4）　**超強（作用素）位相**（τ^{us}）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\sum_n\|x_n\|^2<\infty$ となる任意の点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$

に対して $\sum_n \|(A_\alpha - A)x_n\|^2 \to 0$. ($A_\alpha \xrightarrow{us} A$ と書く.)

(5) **超弱 (作用素) 位相** (τ^{uw}) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ となる任意の $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して $|\sum_n \langle x_n, (A_\alpha - A)y_n \rangle| \to 0$. ($A_\alpha \xrightarrow{uw} A$ と書く.)

(6) **強 * (作用素) 位相** (τ^{s*}) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|(A_\alpha - A)x\|^2 + \|(A_\alpha{}^* - A^*)x\|^2 \to 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$. ($A_\alpha \xrightarrow{s*} A$ と書く.)

(7) **超強 * (作用素) 位相** (τ^{us*}) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_n \|x_n\|^2 < \infty$ となる任意の $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して $\sum_n \{\|(A_\alpha - A)x_n\|^2 + \|(A_\alpha{}^* - A^*)x_n\|^2\} \to 0$. ($A_\alpha \xrightarrow{us*} A$ と書く.)

上記の超位相は **σ 位相**ともいわれる (例えば, 超強位相$=\sigma$ 強位相).

(1)〜(7)の各位相は半ノルムの族を使って表すこともできる. 例えば, τ^{uw} 位相に関しては次のようになる. $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ となる任意の点列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して, 半ノルムは $p_{\{x_n\},\{y_n\}}(A) = |\sum_n \langle x_n, Ay_n \rangle|$ ($A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$) で与えられる.

問 (1)〜(7)の位相を与える半ノルムの族を書き下せ.

$\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ となる任意の $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して, $T = \sum_n x_n \otimes \bar{y}_n$ とおくと, $T \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で $\mathrm{tr}(TA) = \sum_n \langle x_n, Ay_n \rangle$ ($\forall A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$). 逆に, 任意の $T \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ は 2.4 節の最後に述べたように, ONS $\{x_n'\}, \{y_n'\} \subset \mathcal{H}$ により $T = \sum_n \lambda_n x_n' \otimes \bar{y}_n'$ (ここで $\lambda_n \downarrow 0$, $\sum_n \lambda_n < \infty$) と書ける. $x_n = \lambda_n{}^{1/2} x_n'$, $y_n = \lambda_n{}^{1/2} y_n'$ とおけば, $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ で $T = \sum_n x_n \otimes \bar{y}_n$ となる. したがって〈定理 2.18〉より, $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の τ^{uw} 位相は弱 * 位相(i.e., $\sigma(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), \boldsymbol{T}(\mathcal{H}))$ 位相) と一致する.

各位相の強弱関係 (強位相$\succ$弱位相) は次のようになっている.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\tau^u & \succ & \tau^{us*} & \succ & \tau^{us} & \succ & \tau^{uw} \\
 & & \curlyvee & & \curlyvee & & \curlyvee \\
 & & \tau^{s*} & \succ & \tau^{s} & \succ & \tau^{w}
\end{array}
$$

ただし, $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき, 上の 7 つの位相はすべて一致する.

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の一様有界な部分集合を以下 $\mathcal{B}$ と書く (例えば, 単位球 $\mathcal{B} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})_1 \equiv \{A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})\,;\, \|A\| \leqq 1\}$).

〈定理 4.1〉 $\mathcal{B}$ 上では次が成立する. (1) $\tau^{uw}=\tau^{w}$; (2) $\tau^{us}=\tau^{s}$; (3) $\tau^{us*}=\tau^{s*}$.

証明 (1):一様有界なネット$\{A_\alpha\}$が A に τ^w 位相で収束しているとする. このとき, $\sum_n\|x_n\|^2<\infty$, $\sum_n\|y_n\|^2<\infty$ となる任意の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}\subset\mathcal{H}$ に対して, $\lim_\alpha|\sum_n\langle x_n, (A_\alpha-A)y_n\rangle|=0$ を示せばよい. 各 n に対して $\lim_\alpha|\langle x_n, (A_\alpha-A)y_n\rangle|=0$ であるから,

$$\begin{aligned}&\lim_\alpha\ \sup|\sum_n\langle x_n, (A_\alpha-A)y_n\rangle|\\&\qquad\leqq\lim_\alpha\ \sup\sum_{n=1}^{m}|\langle x_n, (A_\alpha-A)y_n\rangle|+\sum_{n=m+1}^{\infty}2c\|x_n\|\|y_n\|\\&\qquad=2c\sum_{n=m+1}^{\infty}\|x_n\|\|y_n\|\to 0\quad(m\to\infty).\end{aligned}$$

ここで, c は任意の α に対して $\|A_\alpha\|\leqq c$ となる定数である. したがって $\tau^{uw}=\tau^{w}$.

(2) および (3) については, (1) の結果と

$$\begin{aligned}&A_\alpha\xrightarrow{s}A\Longleftrightarrow(A_\alpha-A)^*(A_\alpha-A)\xrightarrow{w}0,\\&A_\alpha\xrightarrow{us}A\Longleftrightarrow(A_\alpha-A)^*(A_\alpha-A)\xrightarrow{uw}0,\\&A_\alpha\xrightarrow{s*}A\Longleftrightarrow(A_\alpha-A)^*(A_\alpha-A)+(A_\alpha-A)(A_\alpha-A)^*\xrightarrow{w}0,\\&A_\alpha\xrightarrow{us*}A\Longleftrightarrow(A_\alpha-A)^*(A_\alpha-A)+(A_\alpha-A)(A_\alpha-A)^*\xrightarrow{uw}0\end{aligned}$$

より明らかである. ▌

いま, $A_\alpha\to A$, $B_\alpha\to B$ がある位相 τ に関して成立しているとし, このとき, (a) $A_\alpha{}^*\xrightarrow{\tau}A^*$; (b) $A_\alpha Q\xrightarrow{\tau}AQ$ かつ $QA_\alpha\xrightarrow{\tau}QA$, $\forall Q\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$; (c) $A_\alpha B_\alpha\xrightarrow{\tau}AB$; (d) $\{A_\alpha\}, \{B_\alpha\}\subset\mathcal{B}$ のとき $A_\alpha B_\alpha\xrightarrow{\tau}AB$; が成立するかどうかを考えてみよう. 成立する場合を○印, 不成立な場合を×印で表すと次の結果が得られる.

〈定理 4.2〉

τ	(a)	(b)	(c)	(d)
τ^{u}	○	○	○	○
τ^{s}	×	○	×	○
τ^{w}	○	○	×	×
τ^{us}	×	○	×	○
τ^{uw}	○	○	×	×
τ^{s*}	○	○	×	○
τ^{us*}	○	○	×	○

証明 自明でないもののみ証明を与えておく. 不成立である3つの場合について示す

ため，$\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間とし，$\{x_n\}$ を $\mathcal{H}$ の CONS とする．

τ^s における（a）：$W\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を $Wx_1=0$, $Wx_n=x_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ で定める．任意の $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ $(\lambda_n\in \boldsymbol{C})$ に対して，$W^m x=\sum_{n=m+1}^{\infty}\lambda_n x_{n-m}$ だから，$\|W^m x\|^2=\sum_{n=m+1}^{\infty}|\lambda_n|^2 \to 0$ $(m\to\infty)$．よって $W^m \xrightarrow{s} 0$．しかし，$W^*x_n=x_{n+1}$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ より，$\|(W^*)^m x\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_{n+m}\right\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2=\|x\|^2$．よって $(W^*)^m \xrightarrow{s} 0$ とはならない．ゆえに（a）は成立しない．

τ^w における（d）：上記の W に対して，$\|W^m\|\leqq 1$, $\|(W^*)^m\|\leqq 1$, かつ $W^m\xrightarrow{w}0$, $(W^*)^m\xrightarrow{w}0$ である．しかし，$WW^*=I$ より $W^m(W^*)^m=I$ となり，$W^m(W^*)^m\xrightarrow{w}0$ とはならない．ゆえに（d）は成立しない．

τ^s における（c）：τ^s 位相での 0 の近傍 $\mathcal{N}=\{Q\in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})\,;\,\|Qy_k\|<\varepsilon,\ k=1,\cdots,l\}$（ただし $\varepsilon>0$, $y_k\in\mathcal{H}$）に対して，$c>\max_k\|y_k\|/\varepsilon$ をとると，$W^m\xrightarrow{s}0$ より m を $\|W^m y_k\|<\varepsilon/c$ $(k=1,\cdots,l)$ と選べる．ここで $A=cW^m$, $B=(W^*)^m/c$ とおくと，$\|Ay_k\|=c\|W^m y_k\|<\varepsilon$ かつ $\|By_k\|=\|(W^*)^m y_k\|/c\leqq\|y_k\|/c<\varepsilon$ となり，$A, B\in\mathcal{N}$ である．しかし，$AB=W^m(W^*)^m=I$ だから，（c）は成立しないことがわかる．▌

τ^s における（c）の証明において，$\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を τ^s 位相でそれぞれ A, B に収束する"点列"とすると，任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して $\{\|A_n x\|\}$ は有界であるから，Banach–Steinhaus の定理により $\{A_n\}$ は一様有界となり，したがって

$$\|A_nB_nx-ABx\|\leqq\|A_n\|\|B_nx-Bx\|+\|A_nBx-ABx\|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

で（c）が成立する．この事実は，点列とネットの違いをはっきり示している好例である．

この節を終えるにあたり，以下の節において有用な定理を証明しておこう．

〈定理 4.3〉 自己共役作用素の増大ネット $\{A_\alpha\}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ がある $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して $A_\alpha\leqq B$ であるとき，$A=\sup_\alpha A_\alpha$ が存在して $A_\alpha\xrightarrow{us}A$ となる．（このとき，$A_\alpha\uparrow A$ と書く．）

証明 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，$\{\langle x, A_\alpha x\rangle\}$ は有界な増大ネットであるから，$\lim_\alpha\langle x, A_\alpha x\rangle$ が存在する．したがって偏極化（1.1 節 2° 参照）により，任意の $x, y\in\mathcal{H}$ に対して $F(x,y)=\lim_\alpha\langle x, A_\alpha y\rangle$ が存在する．この $F(x,y)$ は有界な双線形汎函数となり，1.3 節 1° より自己共役な $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が一意に存在して $F(x,y)=\langle x, Ay\rangle$ $(\forall x, y\in\mathcal{H})$．このとき，明らかに $A_\alpha\leqq A$．ところで，すべての α に対して $A_\alpha\leqq Q$ とすると，$\langle x, A_\alpha x\rangle\leqq\langle x, Qx\rangle$ であるから $\langle x, Ax\rangle\leqq\langle x, Qx\rangle$ となり，ゆえに $A=\sup_\alpha A_\alpha$．したがって，任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して

$$\|(A-A_\alpha)x\|^2\leqq\|(A-A_\alpha)^{1/2}\|^2\|(A-A_\alpha)^{1/2}x\|^2$$

$$\leqq 2\|B\|\langle x, (A-A_\alpha)x\rangle \to 0.$$

よって $A_\alpha \xrightarrow{s} A$. さらに，〈定理 4.1〉より $A_\alpha \xrightarrow{us} A$. ▌

〈**補題 4.4**〉 $0\leqq A\leqq I$ のとき，E を $\mathscr{H}$ から $\overline{\mathrm{ran}\,A}$ への射影作用素とすると，次が成立する．

（1） 射影作用素 P に対して，$PA=0 \Longleftrightarrow PE=0$.

（2） E は $A\leqq E$, $AE=EA=A$ を満たす最小の射影作用素である．（この E を A の**台**といい，$\mathrm{s}(A)$ で表す.）

（3） E は定数項をもたない A の実係数多項式の列により τ^{us} 位相で近似できる．

証明 （1）: $PA=0$ とすると，$PAx=0$ $(\forall x\in\mathscr{H})$ であるから $PE=0$. 逆に $PE=0$ とすると，$PAx=PEAx=0$ $(\forall x\in\mathscr{H})$. したがって $PA=0$. ゆえに（1）が成立する．

（2）: $EA=A$ で両辺の共役をとると，$AE=A=EA$. また，射影作用素 F が $AF=A=FA$ を満たすとすると，$(I-F)A=0$ より $(I-F)E=0$ となり，$E=FE\leqq F$. ゆえに（2）が示せた．

（3）: $A=AE=EA$ より，$E-A=E(I-A)\geqq 0$. $0\leqq A\leqq I$ だから，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して，$A^{1/2^{n+1}}-A^{1/2^n}=A^{1/2^{n+1}}-(A^{1/2^{n+1}})^2\geqq 0$. したがって $A\leqq A^{1/2}\leqq A^{1/4}\leqq\cdots\leqq E$. ここで $G=\sup_n A^{1/2^n}$ とおくと，〈定理 4.3〉より $A^{1/2^n}\xrightarrow{us}G$. また $(A^{1/2^n})^2\xrightarrow{us}G^2$ となるから，$G^2=G$. さらに $A\leqq G$ かつ $AG=GA=A$ となり，（2）より $E\leqq G$. しかも明らかに $G\leqq E$ であるから，$G=E$. よって E は $A^{1/2^n}$ により τ^{us} 位相で近似できることが示せた．この $A^{1/2^n}$ は定数項をもたない A の多項式によってノルム近似できるから，（3）が成立する．▌

〈**定理 4.5**〉 $\mathscr{A}\subset\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が自己共役作用素からなる τ^{us} 位相で閉じた実線形空間で，$A\in\mathscr{A}$ ならば $A^2\in\mathscr{A}$ であるとき，次が成立する．

（1） $A\in\mathscr{A}$ ならば $A^n\in\mathscr{A}$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$.

（2） 任意の $A\in\mathscr{A}$ に対して，$\mathscr{H}$ から $\overline{\mathrm{ran}\,A}$ への射影作用素を E_A とすると，$E_A\in\mathscr{A}$.

（3） 最大の射影作用素 $E\in\mathscr{A}$ が存在して，$AE=A=EA$ $(\forall A\in\mathscr{A})$.

（4） $\mathscr{A}$ に属する射影作用素の全体を $\mathscr{P}$ と書くと，$\mathscr{A}$ は $\mathscr{P}$ によって張られる実線形空間のノルム閉包である．

証明 （1）は，$A^{n+1}=\dfrac{1}{2}\{(A+A^n)^2-A^2-A^{2n}\}$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ であるから，帰納法より

明らか.

（2）および（3）：$|A|=(A^2)^{1/2}$ は定数項をもたない A^2 の実係数多項式の列でノルム近似できるから，$|A|\in\mathcal{A}$．したがって $A_\pm=\dfrac{1}{2}(|A|\pm A)\in\mathcal{A}$．一般に $\mathrm{ran}\,A=\mathrm{ran}(AA^*)^{1/2}$ であるが，$A=A^*$ より $\mathrm{ran}\,A=\mathrm{ran}|A|$．したがって，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，〈補題 4.4〉より $E_A\in\mathcal{A}$．さらに，任意の $A,B\in\mathcal{A}$ に対して，$\ker(A^2+B^2)\subset\ker A$, $\ker B$ であるから，$E_A, E_B\leqq E_{A^2+B^2}$．したがって $\{E_A;A\in\mathcal{A}\}$ は増大ネットとなる．$E_A\leqq I$ だから，〈定理 4.3〉より $E=\sup\{E_A;A\in\mathcal{A}\}$ が存在して $E_A\xrightarrow{us}E$．したがって $E\in\mathcal{A}$．ところで E は $\{\mathcal{A}\mathcal{H}\}^-$ への射影作用素となるから，$AE=A=EA$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ である．

（4）：任意の $A\in\mathcal{A}$ と $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，$(A-\lambda E)_+\in\mathcal{A}$ であるから，〈補題 4.4〉より $\mathcal{H}$ から $\overline{\mathrm{ran}}(A-\lambda E)_+$ への射影作用素 F_λ は $\mathcal{A}$ に属し，（3）より $F_\lambda\leqq E$．いま $E_\lambda=E-F_\lambda$ とおくと，A は次のようにスペクトル分解される：(i) $E_\lambda\leqq E_\mu$ $(\lambda<\mu)$；(ii) $E_\mu\downarrow E_\lambda$ $(\mu\downarrow\lambda)$；(iii) $E_\lambda=0$ $(\lambda<-\|A\|)$ かつ $E_\lambda=E$ $(\lambda\geqq\|A\|)$；(iv) $A=\int_{-\|A\|}^{\|A\|}\lambda dE_\lambda$．これより A は $\{E_\lambda\}$ からとった有限個の線形結合でノルム近似できる．▮

註 $\mathcal{A}$ が τ^{us}-閉な＊代数のときも，この定理は当然成立する．ただし，（4）は『$\mathcal{A}$ は $\mathcal{P}$ によって張られる複素線形空間のノルム閉包』となる．

4.2 線形汎函数

この節では，$\mathfrak{N}$ を恒等作用素 I を含み τ^{uw} 位相で閉じている $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数とし，この $\mathfrak{N}$ 上の連続線形汎函数の様々な性質を調べることが主な目標である．ただし，ここで議論する性質のいくつかは，$\mathfrak{N}$ より一般な $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の線形部分空間や＊部分代数上でも成立することを断っておこう．

$\mathfrak{N}$ 上の線形汎函数 φ が τ-連続 (i.e., 位相 τ で連続) であるとは，$A_\alpha\xrightarrow{\tau}A$ のとき $\varphi(A_\alpha)\to\varphi(A)$ となることをいう．2つの位相 τ_1,τ_2 が $\tau_1\prec\tau_2$ であれば，τ_1-連続な φ は τ_2-連続でもある．

〈定理 4.6〉 （1） $\sum_n\|x_n\|^2<\infty$, $\sum_n\|y_n\|^2<\infty$ である任意の点列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset\mathcal{H}$ に対して，線形汎函数 $A\in\mathfrak{N}\longmapsto\sum_n\langle x_n, Ay_n\rangle$ は τ^{uw}-連続である．

（2） $\mathfrak{N}$ 上の線形汎函数 φ が τ^{us*}-連続ならば，$\sum_n\|x_n\|^2<\infty$, $\sum_n\|y_n\|^2<\infty$ である点列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset\mathcal{H}$ が存在して，$\varphi(A)=\sum_n\langle x_n, Ay_n\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ と表せる (ゆえに φ は τ^{uw}-連続)．

証明 （1）は τ^{uw} 位相の定義より明らか．

(2)：φ が τ^{us*}-連続であるとき，$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$ である点列 $\{x_n\}\subset\mathscr{H}$ が存在して $|\varphi(A)|\leqq\{\sum_n(\|Ax_n\|^2+\|A^*x_n\|^2)\}^{1/2}$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．$\overline{\mathscr{H}}$ を $\mathscr{H}$ の共役 Hilbert 空間 (i. e., $\mathscr{H}$ でスカラー倍を $(\lambda, x)\longmapsto\bar{\lambda}x$, 内積を $(x, y)\longmapsto\langle y, x\rangle$ に置き換えた Hilbert 空間)とする．$\mathscr{H}_n=\overline{\mathscr{H}}$ $(n<0)$，$\mathscr{H}_n=\mathscr{H}$ $(n>0)$ とおいて無限直和 Hilbert 空間 $\widetilde{\mathscr{H}}=\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathscr{H}_n$ を考える．$x_{-n}=x_n\in\overline{\mathscr{H}}$ $(n\in\boldsymbol{N})$ とおいて，$\tilde{x}=(\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \cdots)\in\widetilde{\mathscr{H}}$ とする．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して $\tilde{A}\tilde{y}=(\cdots, A^*y_{-2}, A^*y_{-1}, Ay_1, Ay_2, \cdots)$ $(\tilde{y}\in\widetilde{\mathscr{H}})$ と定めると，$\tilde{A}\in\boldsymbol{B}(\widetilde{\mathscr{H}})$ かつ $|\varphi(A)|\leqq\|\tilde{A}\tilde{x}\|$．よって函数 $\tilde{A}\tilde{x}\longmapsto\varphi(A)$ は $\{\tilde{A}\tilde{x}\ ;\ A\in\mathfrak{N}\}$ 上の有界線形汎函数となる．したがって Riesz の定理より，$\tilde{y}\in\widetilde{\mathscr{H}}$ が存在して，

$$\varphi(A)=\langle\tilde{y}, \tilde{A}\tilde{x}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\{\langle y_n, Ax_n\rangle+\langle x_{-n}, Ay_{-n}\rangle\}$$

と表せる．▮

〈定理 4.7〉 $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ の凸部分集合 $\mathscr{A}$ に対して，次は同値である．

(1) $\mathscr{A}$ が τ^{uw}-閉 (i. e., τ^{uw} 位相で閉集合)．

(2) $\mathscr{A}$ が τ^{us}-閉．

(3) $\mathscr{A}$ が τ^{us*}-閉．

(4) $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}_r$ $(\forall r>0)$ が τ^w (ゆえに τ^{uw})-閉．

(5) $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}_r$ $(\forall r>0)$ が τ^s (ゆえに τ^{us})-閉．

(6) $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}_r$ $(\forall r>0)$ が τ^{s*} (ゆえに τ^{us*})-閉．

ただし，(4)～(6) において $\mathscr{B}_r\equiv\{A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\ ;\ \|A\|\leqq r\}$．

証明 位相の強弱関係より，(1)⇒(2)⇒(3) および (4)⇒(5)⇒(6) は明らか．

(3)⇒(1)：$\mathscr{A}\neq\overline{\mathscr{A}}^{uw}$ (τ^{uw} 位相での閉包) とすると，$A\in\overline{\mathscr{A}}^{uw}$ が存在して $A\notin\mathscr{A}$．$\mathscr{A}$ が τ^{us*}-閉凸集合だから，Hahn-Banach の定理より τ^{us*}-連続な線形汎函数 φ が存在して $\mathrm{Re}\,\varphi(A)>\sup\{\mathrm{Re}\,\varphi(B)\ ;\ B\in\mathscr{A}\}$．〈定理 4.6〉の (2) より φ は τ^{uw}-連続でもあるから，上の不等式は A に τ^{uw}-収束するネット $\{A_\alpha\}\subset\mathscr{A}$ が存在することに矛盾する．

(6)⇒(4) も Hahn-Banach の定理を用いて同様に示せる．

(1)⟺(4) は τ^{uw} 位相が弱＊位相と一致することと Krein-Šmulian の定理よりわかる．▮

〈定理 4.6〉と〈定理 4.7〉を考慮すると，次の系が成立する．

〈系 4.8〉 $\mathfrak{N}$ 上の線形汎函数 φ に対して，次は同値である．

(1) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^{uw}-連続．

(2) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^{us}-連続．

(3) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^{us*}–連続.

(4) $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, $\sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ である点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset \mathscr{H}$ が存在して $\varphi(A) = \sum_n \langle x_n, Ay_n \rangle$ $(\forall A \in \mathfrak{N})$.

(5) φ が $\mathfrak{N}_1$ 上で τ^w–連続.

(6) φ が $\mathfrak{N}_1$ 上で τ^s–連続.

(7) φ が $\mathfrak{N}_1$ 上で τ^{s*}–連続.

ただし, (5)〜(7) において $\mathfrak{N}_1 \equiv \{A \in \mathfrak{N} ; \|A\| \leq 1\}$.

同様にして, 次の定理が示せる.

〈**定理 4.9**〉 $\mathfrak{N}$ 上の線形汎函数 φ に対して, 次は同値である.

(1) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^w–連続.

(2) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^s–連続.

(3) φ が $\mathfrak{N}$ 上で τ^{s*}–連続.

(4) $\{x_k\}_{k=1}^n$, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset \mathscr{H}$ が存在して $\varphi(A) = \sum_{k=1}^n \langle x_k, Ay_k \rangle$ $(\forall A \in \mathfrak{N})$.

問 〈定理 4.9〉を証明せよ.

ここで, $\mathfrak{N}$ 上の有界線形汎函数の全体 $\mathfrak{N}^*$ の様々な部分集合を導入しておこう.

(1) $\mathfrak{N}_\sim \equiv \{\varphi \in \mathfrak{N}^* ; \varphi$ は τ^w–連続$\}$.

(2) $\mathfrak{N}_* \equiv \{\varphi \in \mathfrak{N}^* ; \varphi$ は τ^{uw}–連続$\}$.

(3) $\mathfrak{N}_{*,+} \equiv \{\varphi \in \mathfrak{N}_* ; \varphi$ は正$\}$.

(4) 状態の集合 : $\mathfrak{S} \equiv \{\varphi \in \mathfrak{N}_+{}^* ; \|\varphi\| = 1\}$.

(5) ベクトル状態の集合 : $\mathfrak{S}_v \equiv \{\omega_x \in \mathfrak{S} ; x \in \mathscr{H}, \|x\| = 1\}$. ただし $\omega_x(A) = \langle x, Ax \rangle$ $(A \in \mathfrak{N})$.

これらの定義より, $\mathfrak{N}_\sim$ は $\mathfrak{S}_v$ からとった有限個の線形結合の全体であることがわかる. また, $\overline{\mathfrak{N}_\sim} = \mathfrak{N}_*$ であることも容易にわかる. ただし, $\overline{\mathfrak{N}_\sim}$ は $\mathfrak{N}^*$ におけるノルム ($\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(A)| ; A \in \mathfrak{N}_1\}$) による $\mathfrak{N}_\sim$ の閉包である.

さらに, 次の定理は基本的である.

〈**定理 4.10**〉 $\mathfrak{N}_*$ は $\mathfrak{N}^*$ のノルムで Banach 空間となり, かつ $(\mathfrak{N}_*)^* = \mathfrak{N}$ で

ある.

証明 $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ 上の τ^{uw}-連続線形汎函数の全体 $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*$ は〈系 4.8〉と〈定理 2.18〉より $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$ と同一視できて，$\boldsymbol{B}(\mathscr{H})=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})^*=(\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*)^*$. $\mathfrak{N}^\perp=\{\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*\,;\,\varphi(A)=0, \forall A\in\mathfrak{N}\}$ とおくと，$\mathfrak{N}$ は τ^{uw}-閉であるから，$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^{\perp\perp}=\{A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\,;\,\varphi(A)=0, \forall\varphi\in\mathfrak{N}^\perp\}$. そこで，$\varphi+\mathfrak{N}^\perp\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*/\mathfrak{N}^\perp\longmapsto\varphi\restriction\mathfrak{N}\in\mathfrak{N}_*$ が等距離同型写像であることを示す．これが $\mathfrak{N}_*$ の上へのノルム 1 以下の線形写像であることはすぐにわかる．いま $\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*$, $\|\varphi+\mathfrak{N}^\perp\|=1$ とすると，$\mathrm{dist}(\varphi,\mathfrak{N}^\perp)=1$. よって Hahn-Banach の定理より，$A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が存在して，$\|A\|=\varphi(A)=1$ かつ $\psi(A)=0$ $(\forall\psi\in\mathfrak{N}^\perp)$. すなわち，$A\in\mathfrak{N}$ となり $\|\varphi\restriction\mathfrak{N}\|\geqq 1$. したがって $\varphi+\mathfrak{N}^\perp\longmapsto\varphi\restriction\mathfrak{N}$ は等距離写像である．ゆえに $\mathfrak{N}_*=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*/\mathfrak{N}^\perp$ と同一視できるから，$\mathfrak{N}_*$ は Banach 空間であり，$(\mathfrak{N}_*)^*=(\boldsymbol{B}(\mathscr{H})_*/\mathfrak{N}^\perp)^*=\mathfrak{N}^{\perp\perp}=\mathfrak{N}$. ∎

［**定義 4.2**］ $\mathfrak{N}$ 上の正の線形汎函数 φ が**正規** (normal) であるとは，増大ネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}_+\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,A\geqq 0\}$ が上限 $A\in\mathfrak{N}_+$ をもつ (i.e., $A_\alpha\uparrow A=\sup_\alpha A_\alpha$) ならば，$\varphi(\sup_\alpha A_\alpha)=\sup_\alpha\varphi(A_\alpha)$ (i.e., $\varphi(A_\alpha)\uparrow\varphi(A)$) が成立する場合をいう．

次の定理は非常に重要である．

〈**定理 4.11**〉 $\mathfrak{N}$ 上の正の線形汎函数 φ に対して，次は同値である．

（1） φ は正規．

（2） φ は完全加法的，すなわち，互いに直交する任意の射影作用素の族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathfrak{N}$ に対して $\varphi(\sum_{j\in J}E_j)=\sum_{j\in J}\varphi(E_j)$.

（3） $\varphi\in\mathfrak{N}_*$.

（4） $T\in\boldsymbol{T}(\mathscr{H})_+$ が存在して，$\varphi(A)=\mathrm{tr}(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

この定理を証明するために補題を用意する．

〈**補題 4.12**〉 $\{A\in\mathfrak{N}\,;\,0\leqq A\leqq I\}$ は $\mathfrak{N}$ に属する射影作用素全体のノルム閉凸包である．

証明 $A\in\mathfrak{N}, 0\leqq A\leqq I$ に対して，A のスペクトル分解 $A=\int_0^1\lambda dE_\lambda$ をとる．ここで $E_\lambda\in\mathfrak{N}$. $0=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=1$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E_{\lambda_{i-1}}{}^{\perp}-E_{\lambda_i}{}^{\perp})=\lambda_1 I+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)E_{\lambda_i}{}^{\perp}.$$

よって A は $\mathfrak{R}$ に属する射影作用素の凸結合でノルム近似できる．▌

〈補題 4.13〉 （1） 自己共役な $\varphi\in\mathfrak{R}^*$ が完全加法的のとき，任意の射影作用素 $E\in\mathfrak{R}$ に対して，射影作用素 $F\in\mathfrak{R}$, $F\leqq E$ が存在して $\varphi(E)\leqq\varphi(F)$ かつ $\varphi\upharpoonright F\mathfrak{R}F$ は正となる．

（2） 正の $\varphi\in\mathfrak{R}^*$ が完全加法的のとき，任意の射影作用素 $E(\neq 0)\in\mathfrak{R}$ に対して，$0\neq F\leqq E$ となる射影作用素 $F\in\mathfrak{R}$ と $x\in\mathcal{H}$ が存在して $|\varphi(AF)|\leqq\|AFx\|$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$.

証明 （1）: $\{E_j\,;\,j\in J\}$ を互いに直交し $E_j\leqq E, \varphi(E_j)<0$ である射影作用素の極大な族とする．$F=E-\sum_{j\in J}E_j$ とおくと，$\{E_j\}$ の極大性と〈補題 4.12〉より $\varphi\upharpoonright F\mathfrak{R}F$ は正であり，また $\varphi(F)=\varphi(E)-\sum_{j\in J}\varphi(E_j)\geqq\varphi(E)$.

（2）: $(\omega_y-\varphi)(E)=\|Ey\|^2-\varphi(E)>0$ を満たす $y\in\mathcal{H}$ がとれる．（1）より射影作用素 $F\in\mathfrak{R}, F\leqq E$ が存在して，$(\omega_y-\varphi)(F)\geqq(\omega_y-\varphi)(E)>0$ かつ $\|AFy\|^2-\varphi(FA^*AF)=(\omega_y-\varphi)(FA^*AF)\geqq 0$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$. よって $F\neq 0$ で $|\varphi(AF)|^2\leqq\varphi(I)\varphi(FA^*AF)\leqq\varphi(I)\|AFy\|^2$. したがって $x=\varphi(I)^{1/2}y$ とおけばよい．▌

〈定理 4.11〉の証明 （1）⇒（2）: $\{E_j\,;\,j\in J\}$ が互いに直交する射影作用素の族であるとき，有限な各 $K\subset J$ に対して $E_K=\sum_{j\in K}E_j$ とおくと，$E_K\uparrow E=\sum_{j\in J}E_j$. よって $\varphi(E_K)=\sum_{j\in K}\varphi(E_j)\uparrow\varphi(E)$, すなわち $\varphi(\sum_{j\in J}E_j)=\sum_{j\in J}\varphi(E_j)$.

（2）⇒（3）:〈補題 4.13〉より，互いに直交し $\sum_{j\in J}E_j=I$ となる射影作用素の族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathfrak{R}$ と族 $\{x_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{H}$ が存在して，$|\varphi(AE_j)|\leqq\|AE_jx_j\|$ $(\forall A\in\mathfrak{R}, \forall j\in J)$ を満たす．φ が完全加法的であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して有限な $K\subset J$ が存在して，$E=\sum_{j\in K}E_j$, $F=\sum_{j\in J\setminus K}E_j$ とおいて $\varphi(F)\leqq\varepsilon^2\|\varphi\|^{-1}$ とできる．$\varphi_1(A)=\varphi(AE)$, $\varphi_2(A)=\varphi(AF)$ $(A\in\mathfrak{R})$ とおくと，$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$. さらに，任意の $A\in\mathfrak{R}$ に対して，$|\varphi_1(A)|\leqq\sum_{j\in K}\|AE_jx_j\|$ および $|\varphi_2(A)|\leqq\varphi(I)\varphi(FA^*AF)\leqq\|\varphi\|\|A\|^2\varphi(F)\leqq\varepsilon^2\|A\|^2$ が成立する．よって〈系 4.8〉より $\varphi_1\in\mathfrak{R}_*$ であり，$\|\varphi-\varphi_1\|=\|\varphi_2\|\leqq\varepsilon$. ゆえに，〈定理 4.10〉より $\varphi\in\mathfrak{R}_*$.

（3）⇒（1）: $A_\alpha\uparrow A$ となるネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{R}_+$ に対して，〈定理 4.3〉より $\varphi(A_\alpha)\uparrow\varphi(A)$.

（4）⇒（3）: $T\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ は固有値展開定理より，T の固有ベクトルの列 $\{x_n\}$ （x_n の固有値は $\|x_n\|^2$）を用いて $Ty=\sum_n\langle x_n, y\rangle x_n$ $(\forall y\in\mathcal{H})$ と書ける．$\mathrm{tr}(T)<\infty$ より $\sum_n\|x_n\|^2<\infty$. さらに，$\mathcal{H}$ の CONS$\{y_j\}$ をとると，$\mathrm{tr}(TA)=\sum_j\langle y_j, TAy_j\rangle=\sum_j\sum_n\langle y_j, x_n\rangle\langle x_n, Ay_j\rangle=\sum_n\langle x_n, Ax_n\rangle$. したがって $A\longmapsto\mathrm{tr}(TA)$ は τ^{uw}–連続である．

（3）⇒（4）: $\varphi\in\mathfrak{R}_*$ のとき，〈系 4.8〉より $\sum_n\|x_n\|^2<\infty$, $\sum_n\|y_n\|^2<\infty$ となる点列 $\{x_n\}$,

$\{y_n\}\subset\mathcal{H}$ が存在して，$\varphi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n, Ay_n\rangle$ と表せる．ここで $\widetilde{\mathcal{H}}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n(\mathcal{H}_n=\mathcal{H})$ とし，$A\in\mathfrak{N}$, $\tilde{z}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}z_n\in\widetilde{\mathcal{H}}$ に対して $\tilde{A}\tilde{z}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}Az_n$ と定めると，$\tilde{A}\in\boldsymbol{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ かつ $\|\tilde{A}\|=\|A\|$ である．この記法を使うと，$\varphi(A)=\langle\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{y}\rangle$ と書ける．$\psi(A)=\langle\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{A}(\tilde{x}+\tilde{y})\rangle$ と定めると，任意の $A\in\mathfrak{N}_+$ に対して，

$$\psi(A)=\langle\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{x}\rangle+\langle\tilde{y}, \tilde{A}\tilde{y}\rangle+2\,\mathrm{Re}\langle\tilde{x}, \tilde{A}\tilde{y}\rangle\geqq 2\varphi(A).$$

いま $\widetilde{\mathfrak{N}}=\{\tilde{A}\,;\,A\in\mathfrak{N}\}$ とおくと，$2\varphi\leqq\psi$ だから〈定理 3.36〉と同様に，$\{\widetilde{\mathfrak{N}}(\tilde{x}+\tilde{y})\}^-$ 上の有界作用素 $Q\geqq 0$ が存在して $\varphi(A)=\langle\tilde{x}+\tilde{y}, Q\tilde{A}(\tilde{x}+\tilde{y})\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．$\{\widetilde{\mathfrak{N}}(\tilde{x}+\tilde{y})\}^\perp$ 上で $Q=0$ とおいて，Q を $\widetilde{\mathcal{H}}$ 全体に拡張する．$\widetilde{\mathcal{H}}$ から $\{\widetilde{\mathfrak{N}}(\tilde{x}+\tilde{y})\}^-$ への射影作用素は，〈補題 3.21〉より $(\widetilde{\mathfrak{N}})'$ に属する．これより $Q\in(\widetilde{\mathfrak{N}})'$ が容易に示せる．ここで $\tilde{w}=Q^{1/2}(\tilde{x}+\tilde{y})=\bigoplus_{n=1}^{\infty}w_n$ とおくと，$\sum_n\|w_n\|^2<\infty$ より $T=\sum_n w_n\otimes\bar{w}_n\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ となり，$\varphi(A)=\langle\tilde{w}, \tilde{A}\tilde{w}\rangle=\sum_n\langle w_n, Aw_n\rangle=\mathrm{tr}(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．▌

註 上の証明（3）⇒（4）と〈定理 4.9〉から，正の $\varphi\in\mathfrak{N}_\sim$ は有限個の $\{w_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{H}$ によって $\varphi(A)=\sum_{k=1}^{n}\langle w_k, Aw_k\rangle$ と表せることがわかる．

〈系 4.14〉 〈定理 4.11〉の条件（2）と（3）は，任意の $\varphi\in\mathfrak{N}^*$ に対して同値である．

証明 （3）⇒（2）は，〈定理 4.11〉の（1）⇒（2）と同様で簡単に示せる．（2）⇒（3）を証明する．$\varphi\in\mathfrak{N}^*$ が完全加法的ならば，$\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)$, $\frac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$ も完全加法的となる．よって φ を自己共役とし，さらに $\|\varphi\|\leqq 1$ としてよい．$\alpha=\sup\{\varphi(A)\,;\,A\in\mathfrak{N}, 0\leqq A\leqq I\}$ とおくと，〈補題 4.12〉と〈補題 4.13〉より，任意の $0<\varepsilon<1/2$ に対して射影作用素 $E_1\in\mathfrak{N}$ が存在して $\varphi(E_1)>\alpha-\varepsilon$ かつ $\varphi\restriction E_1\mathfrak{N}E_1$ は正となる．$E_2=E_1{}^\perp$ とおいて，$\varphi_{jk}\in\mathfrak{N}^*$ $(j,k=1,2)$ を $\varphi_{jk}(A)=\varphi(E_jAE_k)$ で定めると，$\varphi=\sum_{j,k=1}^{2}\varphi_{jk}$．〈定理 4.11〉より $\varphi\restriction E_1\mathfrak{N}E_1$ は τ^{uw}-連続だから，$\varphi_{11}\in\mathfrak{N}_*$．任意の $A\in\mathfrak{N}$, $\|A\|\leqq 1$ に対して，

$$B=(1-\varepsilon)E_1+\varepsilon E_2+\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}(E_1AE_2+E_2A^*E_1)$$

とおくと，

$$I-B=\varepsilon E_1+(1-\varepsilon)E_2-\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}(E_1AE_2+E_2A^*E_1).$$

任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle x, Bx\rangle&=(1-\varepsilon)\|E_1x\|^2+\varepsilon\|E_2x\|^2+2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}\mathrm{Re}\langle E_1x, AE_2x\rangle\\&\geqq(1-\varepsilon)\|E_1x\|^2+\varepsilon\|E_2x\|^2-2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}\|E_1x\|\|E_2x\|\geqq 0.\end{aligned}$$

同様に $\langle x, (I-B)x\rangle\geqq 0$．よって $0\leqq B\leqq I$ となるから，

$$\begin{aligned}\alpha\geqq\varphi(B)&=(1-\varepsilon)\varphi(E_1)+\varepsilon\varphi(E_2)+\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}\varphi(E_1AE_2+E_2A^*E_1)\\&>(1-\varepsilon)(\alpha-\varepsilon)-\varepsilon+2\varepsilon^{1/2}(1-\varepsilon)^{1/2}\mathrm{Re}\,\varphi(E_1AE_2).\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{Re}\varphi_{12}(A)<\varepsilon^{1/2}(2+\alpha-\varepsilon)/2(1-\varepsilon)^{1/2}<3\varepsilon^{1/2}$．ゆえに $\|\varphi_{12}\|\leqq 3\varepsilon^{1/2}$．同様にして $\|\varphi_{21}\|\leqq 3\varepsilon^{1/2}$．次に，$-\varphi_{22}$ に上の φ に対する議論を適用する．$\beta=\sup\{-\varphi_{22}(A)\,;$

$A\in\mathfrak{N},\ 0\leqq A\leqq I\}=\sup\{-\varphi_{22}(A)\ ;\ A\in\mathfrak{N}, 0\leqq A\leqq E_2\}$ とおくと，射影作用素 $F_1\in\mathfrak{N}$, $F_1\leqq E_2$ が存在して $-\varphi_{22}(F_1)>\beta-\varepsilon$ かつ $-\varphi_{22}\restriction F_1\mathfrak{N}F_1$ は正となる．$F_2=F_1{}^{\perp}$ とおいて，$\psi_{jk}\in\mathfrak{N}^*$ $(j,k=1,2)$ を $\psi_{jk}(A)=\varphi_{22}(F_jAF_k)$ で定めると，$\varphi_{22}=\sum_{j,k=1}^{2}\psi_{jk}$，$\psi_{11}\in\mathfrak{N}_*$，$\|\psi_{12}\|\leqq 3\varepsilon^{1/2}$，$\|\psi_{21}\|\leqq 3\varepsilon^{1/2}$ となる．よって

$$\|\varphi-\varphi_{11}-\psi_{11}\|=\|\varphi_{12}+\varphi_{21}+\psi_{12}+\psi_{21}+\psi_{22}\|\leqq 12\varepsilon^{1/2}+\|\psi_{22}\|.$$

ところで，$E_2F_2=F_2E_2$ で $\psi_{22}(A)=\varphi_{22}(F_2AF_2)=\varphi(E_2F_2AF_2E_2)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．$0\leqq A\leqq I$ のとき，

$$\alpha\geqq\varphi(E_1+E_2F_2AF_2E_2)>\alpha-\varepsilon+\psi_{22}(A),$$
$$\beta\geqq-\varphi_{22}(F_1+F_2E_2AE_2F_2)>\beta-\varepsilon-\psi_{22}(A)$$

より $|\psi_{22}(A)|<\varepsilon$．任意の $A\in\mathfrak{N}$, $\|A\|\leqq 1$ は $A=(A_1-A_2)+i(A_3-A_4)$, $0\leqq A_k\leqq I$ $(k=1,\cdots,4)$ と書けるから，$\|\psi_{22}\|\leqq 4\varepsilon$．ゆえに $\|\varphi-\varphi_{11}-\psi_{11}\|\leqq 12\varepsilon^{1/2}+4\varepsilon$．$\varepsilon\to 0$ として $\varphi\in\mathfrak{N}_*$．∎

$\mathfrak{N}_*$ の部分集合の弱コンパクト (i.e., $\sigma(\mathfrak{N}_*,\mathfrak{N})$-コンパクト) 性に関する次の結果は有用である．

〈定理 4.15〉 $\mathcal{F}\subset\mathfrak{N}_*$ に対して，次は同値である．

（1） $\mathcal{F}$ は相対弱コンパクト．

（2） $\mathcal{F}$ は有界，かつ，互いに直交する任意の射影作用素の列 $\{E_n\}\subset\mathfrak{N}$ に対して，$\varphi\in\mathcal{F}$ について一様に $\varphi(E_n)\to 0$.

証明 （2）⇒（1）：$\mathcal{F}$ が有界だから，Banach-Alaoglu の定理より $\mathcal{F}$ の $\mathfrak{N}^*$ における $\sigma(\mathfrak{N}^*,\mathfrak{N})$-閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ は $\sigma(\mathfrak{N}^*,\mathfrak{N})$-コンパクトである．$\sigma(\mathfrak{N}_*,\mathfrak{N})$ は $\sigma(\mathfrak{N}^*,\mathfrak{N})$ の $\mathfrak{N}_*$ 上での相対位相であるから，$\overline{\mathcal{F}}\subset\mathfrak{N}_*$ を証明すればよい．互いに直交する射影作用素の族 $\{E_j\,;\ j\in J\}\subset\mathfrak{N}$ を任意にとり $E=\sum_{j\in J}E_j$ とすると，〈系 4.14〉より各 $\varphi\in\mathcal{F}$ に対して $\varphi(E)=\sum_{j\in J}\varphi(E_j)$．ここで，$\sum_{j\in J}\varphi(E_j)$ の収束が $\varphi\in\mathcal{F}$ について一様であること，すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して有限な $K_0\subset J$ が存在して，すべての有限な $K\subset J$, $K\cap K_0=\emptyset$ と $\varphi\in\mathcal{F}$ に対して $|\sum_{j\in K}\varphi(E_j)|<\varepsilon$ が成立することを示す．もしこれが成立しないとすると，ある $\varepsilon>0$ と互いに素な J の有限部分集合の列 $\{K_n\}$ と列 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{F}$ が存在して，$|\sum_{j\in K_n}\varphi_n(E_j)|\geqq\varepsilon$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．$F_n=\sum_{j\in K_n}E_j$ とおくと，$\{F_n\}$ は互いに直交する射影作用素の列で $|\varphi_n(F_n)|\geqq\varepsilon$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．これは（2）に矛盾する．さて $\psi\in\overline{\mathcal{F}}$ とすると，ネット $\{\varphi_\alpha\}\subset\mathcal{F}$ がとれて $\sigma(\mathfrak{N}^*,\mathfrak{N})$ 位相で $\varphi_\alpha\to\psi$．有限な $K\subset J$ に対して，

$$\Big|\sum_{j\in K}\psi(E_j)-\psi(E)\Big|\leqq\Big|\sum_{j\in K}\psi(E_j)-\sum_{j\in K}\varphi_\alpha(E_j)\Big|$$
$$+\Big|\sum_{j\in K}\varphi_\alpha(E_j)-\varphi_\alpha(E)\Big|+|\varphi_\alpha(E)-\psi(E)|.$$

上式の右辺の第1，3項は $\alpha\to$“∞”のとき0に収束し，第2項は $K\to J$ のとき φ_α について一様に0に収束する．よって $\psi(E)=\sum_{j\in J}\psi(E_j)$ となり，〈系 4.14〉より $\psi\in\mathfrak{N}_*$．ゆえに

$\overline{\mathcal{F}}\subset\mathfrak{N}_*$ が示せた．

(1)⇒(2)：$\mathcal{F}$ が相対弱コンパクトのとき，$\mathcal{F}$ が有界であることは明らか．(2)を否定すると，互いに直交する射影作用素の列 $\{E_n\}\subset\mathfrak{N}$ と $\varepsilon>0$ と列 $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{F}$ が存在して，$|\varphi_n(E_n)|\geqq 4\varepsilon$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．Eberlein-Šmulian の定理より $\{\varphi_n\}$ は弱収束する部分列をもつから，$\{\varphi_n\}$ 自身が $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に弱収束するとしてよい．さらに，$E_n\xrightarrow{w}0$ より $\varphi(E_n)\to 0$ だから，$|\varphi(E_n)|<\varepsilon$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ としてよい．$\psi_n=\varphi_n-\varphi\in\mathfrak{N}_*$ とおくと，$\psi_n\to 0$（弱収束）で $|\psi_n(E_n)|\geqq 3\varepsilon$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．任意の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$|\lambda_n|=1$ である $\lambda_n\in\boldsymbol{C}$ をとれば，

$$\sum_{n=1}^{m}|\psi(E_n)|=\sum_{n=1}^{m}\lambda_n\psi(E_n)=\psi\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda_nE_n\right)\leqq\|\psi\|$$

となるから，$\sum_{n=1}^{\infty}|\psi(E_n)|<\infty$．そこで自然数の列 $n(1)<n(2)<\cdots$ を次の条件：

$$\sum_{j=n(k+1)}^{\infty}|\psi_{n(k)}(E_j)|<\varepsilon,\quad\left|\sum_{j=1}^{k}\psi_{n(k+1)}(E_{n(j)})\right|<\varepsilon,\quad\forall k\in\boldsymbol{N}$$

を満たすように取り出せることを示そう．$n(1)=1$ とする．$n(1),\cdots,n(p)$ が $k=1,\cdots,p-1$ に対して上の条件を満たすようにとれたとする．$\sum_{j=1}^{\infty}|\psi_{n(p)}(E_j)|<\infty$ および $\psi_n\to 0$（弱収束）より，十分大きな $n(p+1)>n(p)$ をとって，$k=p$ に対しても上の条件を満たすようにできる．したがって，帰納法により求める $n(1)<n(2)<\cdots$ が取り出せた．このとき $E=\sum_{j=1}^{\infty}E_{n(j)}$ とおくと，

$$|\psi_{n(k)}(E)|\geqq|\psi_{n(k)}(E_{n(k)})|-\left|\sum_{j=1}^{k-1}\psi_{n(k)}(E_{n(j)})\right|-\sum_{j=k+1}^{\infty}|\psi_{n(k)}(E_{n(j)})|$$
$$>3\varepsilon-\varepsilon-\sum_{j=n(k+1)}^{\infty}|\psi_{n(k)}(E_j)|>\varepsilon$$

がすべての $k\in\boldsymbol{N}$ に対して成立する．これは $\psi_n\to 0$（弱収束）に矛盾する．▌

この節の最後に，$\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対する 2 つの分解定理を与えよう．まず，2 つの補題を準備する．

〈補題 4.16〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\varphi(E_0)=0$ を満たす最大の射影作用素 $E_0\in\mathfrak{N}$ が存在する．（このとき，$\mathrm{s}(\varphi)=E_0{}^{\perp}$ を φ の台という．）

証明 $\varphi(E)=0$ となる射影作用素 $E\in\mathfrak{N}$ の全体を $\mathcal{E}$ とおく．いま，$A\in\mathfrak{N}_+$ で $\varphi(A)=0$ とする．A のスペクトル分解 $A=\int_0^{\|A\|}\lambda dE_\lambda$ をとり $E_n=\int_{1/n}^{\|A\|}dE_\lambda$ とおくと，$\varphi(E_n)=0$ かつ $E_n\uparrow\mathrm{s}(A)$．よって $\mathrm{s}(A)\in\mathfrak{N}$ で $\varphi(\mathrm{s}(A))=0$．したがって，任意の $E,F\in\mathcal{E}$ に対して，$\mathrm{s}(E+F)\in\mathcal{E}$ かつ $E,F\leqq\mathrm{s}(E+F)$．ゆえに $\mathcal{E}$ は増大ネットであり，〈定理 4.3〉より $E_0=\sup\mathcal{E}$ に τ^{us}-収束する．このとき $\varphi(E_0)=0$ となり，E_0 は $\mathcal{E}$ の最大元である．▌

正の $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\varphi((I-\mathrm{s}(\varphi))A)\leqq\varphi(I-\mathrm{s}(\varphi))^{1/2}\varphi(A^*A)^{1/2}=0$ より $\varphi(A)=\varphi(\mathrm{s}(\varphi)A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．同様に $\varphi(A)=\varphi(A\mathrm{s}(\varphi))$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．

〈**補題 4.17**〉 $\mathfrak{N}$ の単位球 $\mathfrak{N}_1$ の端点 V は半等距離作用素である.

証明 V^*V が射影作用素であることを示せばよい. V^*V が射影作用素でないとすると, $0<\mu<1$ となる $\mu\in\mathrm{Sp}(V^*V)$ が存在する. V^*V のスペクトル分解 $V^*V=\int_0^1\lambda dE_\lambda$ をとる. いま, $0<\varepsilon<1$, $\mu<\alpha<1$ を $\alpha(1+\varepsilon)^2<1$ のようにとり, $A=\varepsilon\int_0^\alpha dE_\lambda$ とおくと, $\|(I\pm A)V^*V(I\pm A)\|\leqq 1$ が容易にわかる. よって $V_\pm=V(I\pm A)\in\mathfrak{N}_1$ であり, $V=\frac{1}{2}(V_+ + V_-)$. V が端点だから, $V_+=V_-=V$. したがって $VA=0$ となり, $V^*VA=\varepsilon\int_0^\alpha\lambda dE_\lambda=0$. これは ε,α のとり方に矛盾する. ▮

$\psi\in\mathfrak{N}_*$ と $V\in\mathfrak{N}$ に対して, $\mathrm{R}_V\psi\in\mathfrak{N}_*$ を $(\mathrm{R}_V\psi)(A)=\psi(AV)$ $(A\in\mathfrak{N})$ と定める.

〈**定理 4.18**〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して, $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ と半等距離作用素 $V\in\mathfrak{N}$ が一意に存在して $\varphi=\mathrm{R}_V\psi$ かつ $V^*V=\mathrm{s}(\psi)$. このとき $\|\varphi\|=\|\psi\|$. (この ψ を φ の**絶対値**といい $\psi=|\varphi|$ と書く. 分解 $\varphi=\mathrm{R}_V\psi$ を φ の**極分解**という.)

証明 $\{A\in\mathfrak{N}_1\,;\,\varphi(A)=\|\varphi\|\}$ は空でない τ^{uw}-コンパクトな凸集合である. Krein-Milman の定理より, この集合は端点 W をもつ. W が $\mathfrak{N}_1$ の端点になることは容易にわかり, 〈補題 4.17〉より W は半等距離作用素である. $\psi=\mathrm{R}_W\varphi$ とおく. $\psi(I)=\varphi(W)=\|\varphi\|\geqq\|\psi\|\geqq\psi(I)$ より, $\|\varphi\|=\|\psi\|=\psi(I)$. よって ψ は正である. いま $V=W^*\mathrm{s}(\psi)$ とおくと $\psi(I-WW^*)=\varphi(W-WW^*W)=0$ より $WW^*\geqq\mathrm{s}(\psi)$. よって $V^*V=\mathrm{s}(\psi)WW^*\mathrm{s}(\psi)=\mathrm{s}(\psi)$. さらに, 任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して, $\psi(A)=\psi(A\mathrm{s}(\psi))=\varphi(A\mathrm{s}(\psi)W)=\varphi(AV^*)$. よって $\mathrm{R}_V\psi=\mathrm{R}_V\mathrm{R}_{V^*}\varphi=\mathrm{R}_{VV^*}\varphi$. そこで $\varphi=\mathrm{R}_{VV^*}\varphi$ を証明する. もしこれが成立しないとすると, $A\in\mathfrak{N}_1$ が存在して $\varphi(A(I-VV^*))=\alpha>0$. このとき, 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|nV^*+A(I-VV^*)\|^2&=\|\{nV^*+A(I-VV^*)\}\{nV+(I-VV^*)A^*\}\|\\&=\|n^2V^*V+A(I-VV^*)A^*\|\leqq n^2+1\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}(n^2+1)^{1/2}\|\varphi\|&\geqq|\varphi(nV^*+A(I-VV^*))|\\&=|n\psi(I)+\varphi(A(I-VV^*))|=n\|\varphi\|+\alpha\end{aligned}$$

となり, n を十分大きくとれば矛盾となる. よって $\varphi=\mathrm{R}_V\psi$ が示せた. 次に, 一意性を示すために, 別に $\varphi=\mathrm{R}_{V'}\psi'$ かつ $V'^*V'=\mathrm{s}(\psi')$ とする.

$$\begin{aligned}\psi(I)&=\psi(V^*V)=\varphi(V^*)=\psi'(V^*V')=\psi'(V'^*V'V^*V')\\&=\varphi(V'^*V'V^*)=\psi(V'^*V'V^*V)=\psi(V'^*V').\end{aligned}$$

よって $V'^*V'\geqq\mathrm{s}(\psi)=V^*V$. 同様にして, $V^*V\geqq V'^*V'$. したがって $V^*V=V'^*V'=E$ とおくと, $V'^*V=V'^*V'V'^*VV^*V=EV'^*VE$ より, $A,B\in(E\mathfrak{N}E)_{sa}$ が存在して V'^*V

$=A+iB$ と書ける．$\psi(A)+i\psi(B)=\psi(V'^*V)=\varphi(V'^*)=\psi'(V'^*V')=\|\psi'\|\geqq\|\varphi\|=\|\psi\|$ より，$\psi(A)\geqq\|\psi\|=\psi(E)$．$E=\mathrm{s}(\psi)$ で $A\leqq E$ だから $A=E$．さらに，$\|E+iB\|\leqq 1$ より $B=0$．よって $V'^*V=E$．このとき $V^*V'=E$ でもあるから，

$$V'V'^*=V'V'^*V'V'^*=V'EV'^*=V'V'^*VV^*V'V'^*.$$

よって $V'V'^*(I-VV^*)V'V'^*=0$ となり，$(I-VV^*)V'V'^*=0$．したがって $V'V'^*\leqq VV^*$．同様にして $VV^*\leqq V'V'^*$．よって $V'V'^*=VV^*$ となり，

$$V'=V'V'^*V'=V'E=V'V'^*V=VV^*V=V,$$

$$\psi'(A)=\psi'(AE)=\psi'(AV^*V')=\varphi(AV^*)=\psi(AV^*V)=\psi(A).\ \blacksquare$$

〈定理 4.19〉 自己共役な $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\varphi_+,\varphi_-\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が一意に存在して $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$ かつ $\mathrm{s}(\varphi_+)\perp\mathrm{s}(\varphi_-)$．このとき $|\varphi|=\varphi_++\varphi_-$．（この分解を φ の **Jordan 分解**という．）

証明 φ の極分解 $\varphi=R_V\psi$, $V^*V=\mathrm{s}(\psi)$ をとる．$\psi_0\in\mathfrak{N}_{*,+}$ を $\psi_0(A)=\psi(V^*AV)$ で定める．φ が自己共役だから，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\varphi(A)=\overline{\varphi(A^*)}=\overline{\psi(A^*V)}=\psi(V^*A)=\psi(V^*AV^*V)=\psi_0(AV^*).$$

よって極分解の一意性より，$\psi=\psi_0$ かつ $V=V^*$．自己共役な半等距離作用素 V は射影作用素 $E_\pm\in\mathfrak{N}$, $E_+\perp E_-$ を用いて $V=E_+-E_-$ と表せる．このとき，$\mathrm{s}(\psi)=E_++E_-$ だから，$\psi(A)=\psi(\mathrm{s}(\psi)A\mathrm{s}(\psi))=\psi(E_+AE_++E_-AE_-)$．よって

$$\varphi(A)=\psi(AV)=\psi(AE_+)-\psi(AE_-)=\psi(E_+AE_+)-\psi(E_-AE_-).$$

そこで $\varphi_+(A)=\psi(E_+AE_+)$，$\varphi_-(A)=\psi(E_-AE_-)$ とおくと，$\varphi_\pm$ は正で，$\varphi=\varphi_+-\varphi_-$ かつ $\mathrm{s}(\varphi_+)=E_+\perp E_-=\mathrm{s}(\varphi_-)$．一意性を示すために，別に $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，$\mathrm{s}(\varphi_1)\perp\mathrm{s}(\varphi_2)$ とする．$E_1=\mathrm{s}(\varphi_1)$，$E_2=\mathrm{s}(\varphi_2)$，$V'=E_1-E_2$，$\psi'=\varphi_1+\varphi_2$ とおくと，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\varphi(A)=\varphi_1(AE_1)-\varphi_2(AE_2)=\psi'(AE_1)-\psi'(AE_2)=\psi'(AV').$$

極分解の一意性より，$\psi'=\psi$ かつ $V'=V$．よって $E_1+E_2=E_++E_-$ かつ $E_1-E_2=E_+-E_-$ となり，$E_1=E_+$，$E_2=E_-$．これより $\varphi_1(A)=\psi'(E_1AE_1)=\psi(E_+AE_+)=\varphi_+(A)$．したがって $\varphi_1=\varphi_+$，$\varphi_2=\varphi_-$．$\blacksquare$

上の定理より，任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\varphi_k\in\mathfrak{N}_{*,+}$ $(k=1,\cdots,4)$ が存在して $\varphi=(\varphi_1-\varphi_2)+i(\varphi_3-\varphi_4)$ と書けることがわかる．

4.3 稠 密 定 理

1.7 節で定義したように，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数 $\mathfrak{N}$ が v.N. 代数であるとは $\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$ を満たすことであった．しかし，より一般に $\overline{\mathfrak{N}}^w$（$\tau^w$ 位相での閉包）$=\mathfrak{N}$ のとき，$\mathfrak{N}$ は v.N. 代数であるという場合もある．次の定理から，この 2 つが

$I\in\mathfrak{R}$ の場合に一致することがわかる．さらに，＊部分代数 $\mathfrak{R}$ の閉包は τ^u 以外のすべての位相で一致することがわかる．

〈定理 4.20〉 von Neumann の稠密定理（双可換子定理）：$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数 $\mathfrak{R}$ が $I\in\mathfrak{R}$ のとき，次は同値である：（1）$\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$；（2）$\overline{\mathfrak{R}}^w=\mathfrak{R}$；(2′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^w=\mathfrak{R}_1$；（3）$\overline{\mathfrak{R}}^s=\mathfrak{R}$；(3′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^s=\mathfrak{R}_1$；（4）$\overline{\mathfrak{R}}^{s*}=\mathfrak{R}$；(4′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^{s*}=\mathfrak{R}_1$；（5）$\overline{\mathfrak{R}}^{uw}=\mathfrak{R}$；(5′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^{uw}=\mathfrak{R}_1$；（6）$\overline{\mathfrak{R}}^{us}=\mathfrak{R}$；(6′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^{us}=\mathfrak{R}_1$；（7）$\overline{\mathfrak{R}}^{us*}=\mathfrak{R}$；(7′) $\overline{\mathfrak{R}_1}^{us*}=\mathfrak{R}_1$．

証明 （5），（6），（7），(2′)，(3′)，(4′)，(5′)，(6′)，(7′) の同値性は〈定理 4.7〉より明らか．また，（2）⇒（3）⇒（4）⇒（7）は位相の強弱関係より明らか．したがって，（1）⇒（2）および（6）⇒（1）を示せばよい．

（1）⇒（2）：$A\in\overline{\mathfrak{R}}^w$ とすると，$A_\alpha\xrightarrow{w}A$ となるネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{R}$ が存在する．任意の $B\in\mathfrak{R}'$ に対して，$|\langle x,[A,B]y\rangle|\leqq|\langle x,(A-A_\alpha)By\rangle|+|\langle x,B(A_\alpha-A)y\rangle|\to 0$ $(\forall x,y\in\mathcal{H})$．よって $[A,B]=0$．したがって $A\in\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}$．

（6）⇒（1）：〈定理 4.11〉の証明（3）⇒（4）で構成した $\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\mathfrak{R}}$ を使う．任意の $X\in\boldsymbol{B}(\widetilde{\mathcal{H}})$ は $X_{ij}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ $(i,j\in\boldsymbol{N})$ を用いて $(X\tilde{x})_i=\sum_j X_{ij}x_j$ $(\tilde{x}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}x_n)$ で定められる．よって X を行列 (X_{ij}) と同一視できる．このとき，$X\in(\widetilde{\mathfrak{R}})'$ であることは等式 $\sum_j AX_{ij}x_j=\sum_j X_{ij}Ax_j$ $(\forall\tilde{x}\in\widetilde{\mathcal{H}},\forall A\in\mathfrak{R})$ が成立することと同値である．したがって $(\widetilde{\mathfrak{R}})'=\{X\in\boldsymbol{B}(\widetilde{\mathcal{H}})\,;\,X_{ij}\in\mathfrak{R}',\forall\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in\boldsymbol{N}\}$ となる．さらに，同様な議論より，$(\widetilde{\mathfrak{R}})''=\widetilde{\mathfrak{R}''}=\{\tilde{A}\,;\,A\in\mathfrak{R}''\}$ もわかる．さて，任意の $A\in\mathfrak{R}''$ と $\varepsilon>0$ および $\sum_n\|x_n\|^2<\infty$ である点列 $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ に対して，ある $B\in\mathfrak{R}$ が存在して $\sum_n\|(A-B)x_n\|^2<\varepsilon$ を示せばよいが，このことは $\tilde{x}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}x_n\in\widetilde{\mathcal{H}}$ とおいて $\|(\tilde{A}-\tilde{B})\tilde{x}\|^2<\varepsilon$ を示すことに他ならない．つまり，$\widetilde{\mathcal{H}}$ から $\widetilde{\mathcal{H}}$ の閉部分空間 $\{\widetilde{\mathfrak{R}}\tilde{x}\}^-$ への射影作用素を E とするとき，$E\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{A}\tilde{x}$ を示せばよい．ところで，$(\widetilde{\mathfrak{R}})''=\widetilde{\mathfrak{R}''}$ であるから，$A\in\mathfrak{R}''$ ならば $\tilde{A}\in(\widetilde{\mathfrak{R}})''$．また，〈補題 3.21〉より $E\in(\widetilde{\mathfrak{R}})'$ であり，〈補題 3.25〉より $\tilde{x}\in\{\widetilde{\mathfrak{R}}\tilde{x}\}^-$ である．ゆえに $E\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{A}E\tilde{x}=\tilde{A}\tilde{x}$．∎

この定理が $I\in\mathfrak{R}$ より弱い条件 $[\![\mathfrak{R}\mathcal{H}]\!]=\mathcal{H}$ (i.e.，$\mathfrak{R}$ が非縮退）の下でも成立することは，証明（〈補題 3.21〉と〈補題 3.25〉を使うところ）をみれば明らかであろう．

$I\in\mathfrak{R}$ でなくても一般に，

〈定理 4.21〉 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数 $\mathfrak{R}$ が $\overline{\mathfrak{R}}^{us*}=\mathfrak{R}$ のとき，次が成立する．

（1） 最大の射影作用素 $E\in\mathfrak{R}$ が存在して，$E\mathcal{H}=\{\mathfrak{R}\mathcal{H}\}^-$ かつ $AE=A=$

EA ($\forall A\in\mathfrak{N}$).

(2) $\mathfrak{N}''=\boldsymbol{C}I+\mathfrak{N}$, かつ(1)の E により $\mathfrak{N}=E\mathfrak{N}''E$.

証明 〈定理 4.7〉より $\overline{\mathfrak{N}}^{us}=\mathfrak{N}$. よって〈定理 4.5〉より,(1)は明らか.(2)を証明する. $\mathfrak{N}$ の $\mathcal{L}=E\mathcal{H}$ への制限を $\mathfrak{N}_E$ とおく. すなわち $\mathfrak{N}_E\equiv\{A_E=EA\upharpoonright\mathcal{L}\,;\,A\in\mathfrak{N}\}$. 同様に $\mathfrak{N}$ の $\mathcal{L}^\perp$ への制限を $\mathfrak{N}_{E^\perp}$ とおく. (1)より, $\mathfrak{N}\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ かつ $\mathfrak{N}\mathcal{L}^\perp\subset\mathcal{L}^\perp$ であり $\mathfrak{N}_{E^\perp}=\{0\}$. したがって, $\mathcal{H}=\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^\perp$ と直和分解して考えると, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_E\oplus 0$ となり $\mathfrak{N}'=(\mathfrak{N}_E)'\oplus\boldsymbol{B}(\mathcal{L}^\perp)$. よって $\mathfrak{N}''=(\mathfrak{N}_E)''\oplus\boldsymbol{C}I_{\mathcal{L}^\perp}$ (ここで $I_{\mathcal{L}^\perp}$ は $\mathcal{L}^\perp$ 上の恒等作用素). ところで, 写像 $A\in\mathfrak{N}\longmapsto A_E\in\mathfrak{N}_E$ は τ^{us*} 位相に関して位相同型であるから, $\overline{\mathfrak{N}_E}^{us*}=\mathfrak{N}_E$ となる. また, $\mathfrak{N}_E$ は $\mathcal{L}$ 上の恒等作用素を含むから, 〈定理 4.20〉より $(\mathfrak{N}_E)''=\mathfrak{N}_E$. したがって $\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}_E\oplus\boldsymbol{C}I_{\mathcal{L}^\perp}=\mathfrak{N}+\boldsymbol{C}(I-E)=\boldsymbol{C}I+\mathfrak{N}$. このとき $\mathfrak{N}=E\mathfrak{N}''E$ は明らか. ▌

この定理より, $I\notin\mathfrak{N}$ の場合でも $\overline{\mathfrak{N}}^{us*}=\mathfrak{N}$ ならば, ある射影作用素 E が存在して, $\mathfrak{N}$ の $\mathrm{ran}\,E=E\mathcal{H}$ への制限 $\mathfrak{N}_E$ は $\mathfrak{N}$ と * 同型な v.N. 代数 (i.e., $(\mathfrak{N}_E)''=\mathfrak{N}_E$) であることがわかる. これはかなり応用性のある事実である.

ここで, v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ がもつ性質のうち, 容易に導ける2,3の事柄を挙げておこう.

1° $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_{sa}+i\mathfrak{N}_{sa}$ ($\mathfrak{N}_{sa}\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,A=A^*\}$). また, スペクトル定理より, 任意の $A\in\mathfrak{N}_{sa}$ と A のスペクトル集合 $\mathrm{Sp}(A)$ 上の任意の有界実 Borel 函数 f に対して $f(A)\in\mathfrak{N}_{sa}$.

2° 次は同値である:(1) $A\in\mathfrak{N}'$;(2) 任意の射影作用素 $E\in\mathfrak{N}$ に対して $AE=EA$;(3) 任意のユニタリー作用素 $U\in\mathfrak{N}$ に対して $AU=UA$.

3° $A\in\mathfrak{N}$ の極分解を $A=W|A|$ と書くと, $|A|, W\in\mathfrak{N}$. (実際, 任意のユニタリー作用素 $U\in\mathfrak{N}'$ に対して, $A=UAU^*=UWU^*U|A|U^*$. 極分解の一意性より $W=UWU^*$, $|A|=U|A|U^*$.)

問 命題 1°, 2° を証明せよ.

さて, $\mathfrak{N}$ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の * 部分代数のとき, 〈定理 4.20〉より, 任意の $A\in\mathfrak{N}''$ に対してネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ が存在して $A_\alpha\xrightarrow{s^*}A$. ここで $A^*=A$ ならば, $A_\alpha{}^*=A_\alpha\xrightarrow{s}A$ にとれるが, $\{A_\alpha\}$ が一様有界とは限らないから, $A_\alpha{}^2\xrightarrow{s}A^2$ などは成立するかどうか定かではない. これを保証するのが次の有用な定理である.

〈定理 4.22〉 Kaplansky の稠密定理:$\mathfrak{N}$ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の * 部分代数のとき,

任意の $A\in\overline{\mathfrak{N}}^{w}$ に対して，ネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}$ が存在して $\|A_\alpha\|\leqq\|A\|$ $(\forall\alpha)$ かつ $A_\alpha\xrightarrow{us*}A$.

$A\in\overline{\mathfrak{N}}^{w}$ のとき $A/\|A\|\in(\overline{\mathfrak{N}}^{w})_1$ となるから，この定理は次のように言い換えることができる.

〈定理 4.22′〉 〈定理 4.22〉の条件の下で，$\overline{\mathfrak{N}_1}^{us*}=(\overline{\mathfrak{N}}^{w})_1$.

証明 $\mathfrak{M}=\overline{\mathfrak{N}}^{w}$ とおく. $\mathfrak{N}_1$ は $\mathfrak{N}$ の τ^u-閉包の単位球の中で τ^u-稠密であるから，$\mathfrak{N}$ を C* 代数としても一般性を失わない. 〈定理 4.20〉より $\overline{\mathfrak{N}}^{us*}=\mathfrak{M}$ だから，$\overline{\mathfrak{N}_{sa}}^{us}=\mathfrak{M}_{sa}$. 実数値函数 $f(t)=2t/(1+t^2)$ $(t\in\boldsymbol{R})$ を考えると，f は $[-1,1]$ から $[-1,1]$ の上への1対1単調増加函数である. そこで $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_{sa}$ から $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_{sa}$ への写像 f を $f(A)=2A(I+A^2)^{-1}$ $(A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_{sa})$ で定めると，f は任意の C* 代数 $\mathcal{A}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{A}_{sa}$ を $(\mathcal{A}_1)_{sa}$ に写す. さらに，この f は $(\mathcal{A}_1)_{sa}$ からそれ自身への全単射でもある. したがって，f が τ^{us}-連続であることを示せば，$\overline{(\mathfrak{N}_1)_{sa}}^{us}=\overline{f(\mathfrak{N}_{sa})}^{us}=f(\mathfrak{M}_{sa})=(\mathfrak{M}_1)_{sa}$ がわかる. いま，任意の $A,B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})_{sa}$ をとると，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{f(A)-f(B)\}&=A(I+A^2)^{-1}-B(I+B^2)^{-1}\\
&=(I+A^2)^{-1}\{A(I+B^2)-(I+A^2)B\}(I+B^2)^{-1}\\
&=(I+A^2)^{-1}(A-B)(I+B^2)^{-1}+(I+A^2)^{-1}A(B-A)B(I+B^2)^{-1}\\
&=(I+A^2)^{-1}(A-B)(I+B^2)^{-1}+\frac{1}{4}f(A)(B-A)f(B)
\end{aligned}
$$

であるから，実際 f は τ^{us}-連続である. 最後に，$\overline{(\mathfrak{N}_1)_{sa}}^{us}=(\mathfrak{M}_1)_{sa}$ のみならず，$\overline{\mathfrak{N}_1}^{us*}=\mathfrak{M}_1$ を示すために，Hilbert 空間 $\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ を考える. $\boldsymbol{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ の任意の元は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元を成分とする 2×2 行列 (A_{ij}) で表される. そこで $\tilde{\mathfrak{N}}=\{(A_{ij})\,;\,A_{ij}\in\mathfrak{N}\}$, $\tilde{\mathfrak{M}}=\{(A_{ij})\,;\,A_{ij}\in\mathfrak{M}\}$ とおくと，$\tilde{\mathfrak{N}},\tilde{\mathfrak{M}}$ は $\boldsymbol{B}(\tilde{\mathcal{H}})$ の＊部分代数であり，$\overline{\tilde{\mathfrak{N}}}^{w}=\tilde{\mathfrak{M}}$ となる. いま，任意の $A\in\mathfrak{M}_1$ に対して，$\tilde{A}\in(\tilde{\mathfrak{M}}_1)_{sa}$ を $\tilde{A}=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^* & 0\end{pmatrix}$ でとると，すでに証明したことより，ネット $\{\tilde{A}_\alpha\}\subset(\tilde{\mathfrak{N}}_1)_{sa}$ が存在して $\tilde{A}_\alpha\xrightarrow{us}\tilde{A}$. すなわち，

$$
\tilde{A}_\alpha=\begin{pmatrix}A_{11}^{(\alpha)} & A_{12}^{(\alpha)}\\ A_{21}^{(\alpha)} & A_{22}^{(\alpha)}\end{pmatrix},\quad A_{ij}^{(\alpha)*}=A_{ij}^{(\alpha)}
$$

で $A_{12}^{(\alpha)}\xrightarrow{us}A$, $A_{12}^{(\alpha)*}=A_{21}^{(\alpha)}\xrightarrow{us}A^*$, かつ $\|A_{12}^{(\alpha)}\|\leqq\|\tilde{A}_\alpha\|\leqq1$. ∎

この定理の簡単な応用として，次の定理を証明しておこう.

〈定理 4.23〉 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の＊部分代数 $\mathfrak{N}$ が $I\in\mathfrak{N}$ のとき，$\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$ であることと $\mathfrak{N}_1$ が τ^{uw}-コンパクトであることは同値である.

証明　$\mathfrak{N}$ が v.N. 代数であれば，〈定理 4.20〉より $\overline{\mathfrak{N}}^{uw}=\mathfrak{N}$. また，〈定理 4.10〉より $\mathfrak{N}=(\mathfrak{N}_*)^*$ であり，$\mathfrak{N}$ の弱 * 位相は τ^{uw} 位相と一致するから，Banach–Alaoglu の定理より $\mathfrak{N}_1$ は τ^{uw}–コンパクトである．逆に，$\mathfrak{N}_1$ が τ^{uw}–コンパクトであるとすると，$\overline{\mathfrak{N}_1}^{uw}=\mathfrak{N}_1$ であるから，〈定理 4.7〉より $\overline{\mathfrak{N}_1}^{us*}=\mathfrak{N}_1$. また，〈定理 4.22′〉より $\overline{\mathfrak{N}_1}^{us*}=(\overline{\mathfrak{N}}^{w})_1$ であったから，$(\overline{\mathfrak{N}}^{w})_1=\mathfrak{N}_1$. ゆえに $\overline{\mathfrak{N}}^{w}=\mathfrak{N}$. ▌

以下この節では，Hilbert 空間が可分である場合を主に議論する．自然科学や情報科学において扱う Hilbert 空間はほとんどの場合可分であるから，可分でない一般の Hilbert 空間での議論はさして重要なものではない．

〈定理 4.24〉　可分な Hilbert 空間上の v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に対して，$\mathfrak{N}_1$ は τ^s（および τ^w）位相に関して距離付け可能である．

証明　$\{x_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ を $\mathcal{H}$ の単位球で稠密な可算集合とする．ネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}_1$ に対して，$A_\alpha\xrightarrow{s}A$ は $\|(A_\alpha-A)x_n\|\to0$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ と同値である．ゆえに $\mathfrak{N}_1$ 上の距離 $d_s(A,B)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|(A-B)x_n\|$ $(A,B\in\mathfrak{N}_1)$ は τ^s 位相を定める．τ^w 位相に関しても同様である．その場合の距離は $d_w(A,B)=\sum_{m,n=1}^{\infty}2^{-(m+n)}|\langle x_m,(A-B)x_n\rangle|$ で与えられる．▌

$\mathcal{A}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を含む最小の v.N. 代数が $\mathfrak{N}$ であるとき，$\mathfrak{N}$ は $\mathcal{A}$ によって生成されるという．これは $\mathfrak{N}=(\mathcal{A}\cup\mathcal{A}^*)''$ と同値である．

〈系 4.25〉　可分な Hilbert 空間上の v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ は可算個の元によって生成される．

証明　〈定理 4.23〉より $\mathfrak{N}_1$ は τ^w–コンパクトだから，〈定理 4.24〉より $\mathfrak{N}_1$ で τ^w–稠密な可算集合 $\{A_n\}$ が存在する．このとき，明らかに $\mathfrak{N}$ は $\{A_n\}$ によって生成される．▌

この節の最後に，可分な Hilbert 空間上の可換 v.N. 代数はただ 1 つの作用素から生成されることを証明しておこう．そのために，

〈補題 4.26〉　Rickart の補題：コンパクト Hausdorff 空間 Ω に対して，$C(\Omega)$ が Banach 代数として可算個のベキ等元によって生成されていれば，それはただ 1 つの実函数から生成される．

証明　$C(\Omega)$ がベキ等元の列 $\{e_n\}$ によって生成されるとする．各 $\omega\in\Omega$ に対して $f(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}(2e_n(\omega)-1)$ と定めると，$2e_n(\omega)-1=1$ または -1 であるから $f\in C(\Omega)$. さらに，$\{e_n\}$ は $C(\Omega)$ を生成するから，任意の $\omega,\omega'\in\Omega\,(\omega\neq\omega')$ に対して，ある $k\in\boldsymbol{N}$

で $e_k(\omega)\neq e_k(\omega')$ となり，よって $f(\omega)\neq f(\omega')$ がわかる．したがって f は Ω の点を分離する実函数であるから，Stone–Weierstrass の定理より，f は $C(\Omega)$ を生成する． ▌

〈定理 4.27〉 可分な Hilbert 空間上の可換な v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ はただ1つの自己共役作用素によって生成される．

証明 〈系 4.25〉より，$\mathfrak{N}$ は可算な $\{A_n\}\subset\mathfrak{N}_1$ によって生成される．ここで $A_n=A_n^*$ にとれる． A_n のスペクトル分解 $A_n=\int_{-1}^{1}\lambda dE_\lambda^{(n)}$ をとって，$\mathcal{A}$ を集合 $\{E_\lambda^{(n)}\,;\,\lambda\in\boldsymbol{Q}\cap[-1,1], n\in\boldsymbol{N}\}$ によって生成される C* 代数とする．このとき $\mathcal{A}''=\mathfrak{N}$ で，$\mathfrak{N}$ が可換だから $\mathcal{A}$ も可換である．さらに，$I\in\mathcal{A}$ であるから，〈定理 3.7〉の Gelfand–Naimark の定理より，あるコンパクト Hausdorff 空間 $\Omega(=\mathrm{Sp}(\mathcal{A}))$ が存在して $\mathcal{A}=C(\Omega)$．〈補題 4.26〉の $f\in C(\Omega)$ に対応する元を $A\in\mathcal{A}$ とすると，$\mathfrak{N}$ は A によって生成される． ▌

4.4 作用素代数のテンソル積

1.2 節の最後で Hilbert 空間のテンソル積を定義したが，この節では v.N. 代数のテンソル積を定義し，その重要な性質を導く．さらに，C* 代数の C* テンソル積についても説明を与える．以下，$\mathcal{H},\mathcal{K}$ を2つの Hilbert 空間とし，$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ をそれらのテンソル積 Hilbert 空間，$\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ を $\{x\otimes y\,;\,x\in\mathcal{H}, y\in\mathcal{K}\}$ からとった有限個の線形結合の全体とする．

$A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ に対して，$\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ 上の線形写像 $A\otimes B$ が $A\otimes B(x\otimes y)=Ax\otimes By$ $(x\in\mathcal{H}, y\in\mathcal{K})$ により定義される．

〈補題 4.28〉 （1） 任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ に対して，$A\otimes B$ は $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上の有界線形作用素に拡張される．これを同じ $A\otimes B$ で表すと，$\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|$.

（2） $(A,B)\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\times\boldsymbol{B}(\mathcal{K})\mapsto A\otimes B\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ は双線形写像である．

（3） $(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*$.

証明 （1）：任意の $f\in\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ を ONS$\{y_i\}_{i=1}^n$ を用いて $f=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$ と表すと，

$$\|(A\otimes I)f\|^2=\left\|\sum_{i=1}^n Ax_i\otimes y_i\right\|^2=\sum_{i=1}^n\|Ax_i\|^2$$
$$\leq\|A\|^2\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2=\|A\|^2\|f\|^2.$$

よって $A\otimes I$ は $\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ 上で有界で $\|A\otimes I\|\leqq\|A\|$. 同様に $I\otimes B$ も $\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ 上で有界で $\|I\otimes B\|\leqq\|B\|$. $\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ 上で $A\otimes B=(A\otimes I)(I\otimes B)$ となるから, $A\otimes B$ は $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上の有界作用素に拡張されて $\|A\otimes B\|\leqq\|A\|\|B\|$. また, 任意の $x\in\mathcal{H}, y\in\mathcal{K}$ に対して,

$$\|Ax\|\|By\|=\|Ax\otimes By\|=\|A\otimes B(x\otimes y)\|$$
$$\leqq\|A\otimes B\|\|x\otimes y\|=\|A\otimes B\|\|x\|\|y\|.$$

よって $\|A\|\|B\|\leqq\|A\otimes B\|$ となり, $\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|$.

(2)は明らかであり, (3)は

$$\langle(A\otimes B)^*(x\otimes y), u\otimes v\rangle=\langle x\otimes y, A\otimes B(u\otimes v)\rangle=\langle x, Au\rangle\langle y, Bv\rangle$$
$$=\langle A^*x, u\rangle\langle B^*y, v\rangle=\langle A^*\otimes B^*(x\otimes y), u\otimes v\rangle$$

よりわかる. ▌

［**定義 4.3**］ $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ をそれぞれ $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ 上の v.N. 代数とするとき, $\{A\otimes B\,;\,A\in\mathfrak{N}, B\in\mathfrak{M}\}$ によって生成される $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上の v.N. 代数を $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ の**テンソル積**といい, $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ で表す. すなわち $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}=\{A\otimes B\,;\,A\in\mathfrak{N}, B\in\mathfrak{M}\}''$.

さて, $\mathcal{K}$ の CONS $\{y_k\,;\,k\in K\}$ をとり固定する. 各 $k\in K$ に対して $V_kx=x\otimes y_k$ $(x\in\mathcal{H})$ と定めると, $V_k:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ は等距離作用素であり, $V_k^*(x\otimes y)=\langle y_k, y\rangle x$ $(\forall x\in\mathcal{H}, \forall y\in\mathcal{K})$. 任意の $X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ に対して $X_{ij}=V_i^*XV_j$ $(i, j\in K)$ とすると, $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元を成分とする行列 (X_{ij}) が定まる. $X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\mapsto(X_{ij})$ が1対1であることはすぐにわかる. $X=(X_{ij})$ と同一視して書くと, $X=(X_{ij}), Y=(Y_{ij})\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ に対して,

$$(\lambda X+\mu Y)_{ij}=\lambda X_{ij}+\mu Y_{ij}, \quad \lambda, \mu\in\boldsymbol{C},$$
$$(XY)_{ij}=\sum_{k\in K}X_{ik}Y_{kj} \quad (\tau^{us}\text{-収束}),$$
$$(X^*)_{ij}=X_{ji}^*$$

が成立する. 2番目の等式は, $V_kV_k^*$ が $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ から部分空間 $\{x\otimes y_k\,;\,x\in\mathcal{H}\}$ への射影作用素であり $\sum_{k\in K}V_kV_k^*=I$ (τ^{us}-収束) であることからわかる.

〈**定理 4.29**〉 $\mathfrak{N}$ は $\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数とする.

(1) $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I=\{X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\,;\,X_{ij}=\delta_{ij}A\ (\forall i, j\in K), A\in\mathfrak{N}\}$. ただし $\delta_{ij}=1$ $(i=j)$, 0 $(i\neq j)$.

(2) $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})=\{X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})\,;\,X_{ij}\in\mathfrak{N}\ (\forall i, j\in K)\}$.

(3) $\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K})=\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$.

(4) $(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I)'=\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$.

(5) $(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'=\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{C}I$.

証明 (1): $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I=\{A\otimes I;\ A\in\mathfrak{N}\}$ と $(A\otimes I)_{ij}=\delta_{ij}A$ から明らかである.

(5): $(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'=\{(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I)\cup(\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))\}'=(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I)'\cap(\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'$. $Y=I\otimes B\in\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$ のとき, $Y_{ij}=\langle y_i, By_j\rangle I$. よって, $X\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ に対して, $X\in(\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'$ であるための条件は $\sum_k\langle y_k, By_j\rangle X_{ik}=\sum_k\langle y_i, By_k\rangle X_{kj}$ $(\forall i, j\in K,\ \forall B\in\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))$ と書ける. これは $A\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ が存在して $X_{ij}=\delta_{ij}A$ $(\forall i, j\in K)$ となることを意味する. よって(1)より $(\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\otimes\boldsymbol{C}I$. したがって $(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'=(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I)'\cap(\boldsymbol{B}(\mathscr{H})\otimes\boldsymbol{C}I)=\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{C}I$.

(4): (5) より $(\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'=\mathfrak{N}''\otimes\boldsymbol{C}I=\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I$. よって $(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I)'=(\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))''=\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$.

(2): $\widetilde{\mathfrak{N}}=\{X\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K});\ X_{ij}\in\mathfrak{N}\ (\forall i, j\in K)\}$ とおくと, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は $\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ の $*$ 部分代数で $I\in\widetilde{\mathfrak{N}}$. 各 $i, j\in K$ に対して $X\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})\longmapsto X_{ij}\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ は τ^w-連続であるから, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は τ^w-閉である. よって $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は $\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ 上の v.N. 代数である. $Y\in\boldsymbol{B}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$ に対して, $Y\in(\widetilde{\mathfrak{N}})'$ であるための条件は $\sum_k X_{ik}Y_{kj}=\sum_k Y_{ik}X_{kj}$ $(\forall i, j\in K, \forall X\in\widetilde{\mathfrak{N}})$ と書ける. これは $B\in\mathfrak{N}'$ が存在して $Y_{ij}=\delta_{ij}B$ $(\forall i, j\in K)$ となることを意味する. よって(1),(5)より $(\widetilde{\mathfrak{N}})'=\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{C}I=(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K}))'$. したがって $\widetilde{\mathfrak{N}}=\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathscr{K})$.

(3)は(2)より明らか. ▌

上の証明と同様な議論を〈定理 4.20〉の証明ですでに用いた. 上の定理の(1)に関連して, $A\in\mathfrak{N}\longmapsto A\otimes I\in\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I$ は $\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{C}I$ の上への $*$ 同型写像である.

上の(4),(5)を一般化した次の定理は Tomita によって証明された. Rieffel–van Daele の方法による証明が Takesaki [25] にある.

〈定理 4.30〉 テンソル積の可換子定理: 任意の v.N. 代数 $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ に対して, $(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})'=\mathfrak{N}'\otimes\mathfrak{M}'$.

以下では $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ をそれぞれ $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ 上の v.N. 代数とし, $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ の正規表現に対して, それらのテンソル積としての $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ の正規表現がつくれることを示そう. ここで, $\mathfrak{N}$ の表現 π が**正規**であるとは, $A_\alpha\uparrow A$ となる任意のネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}_+$ に対して $\pi(A_\alpha)\uparrow\pi(A)$ が成立する場合をいう.

〈補題 4.31〉 $\{\mathcal{H}_1, \pi\}$ が $\mathfrak{N}$ の正規表現とするとき，任意の $\varphi \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*$ に対して $\varphi \circ \pi \in \mathfrak{N}_*$ であり，$\pi : \mathfrak{N} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)$ は τ^{uw} 位相に関して連続である．さらに，$\pi(\mathfrak{N})$ は v.N. 代数である．

証明 正の $\varphi \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*$ に対して，$\varphi \circ \pi$ は正規となるから，〈定理 4.11〉より $\varphi \circ \pi \in \mathfrak{N}_*$．よって〈定理 4.19〉より，任意の $\varphi \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*$ に対して $\varphi \circ \pi \in \mathfrak{N}_*$．ネット $\{A_\alpha\} \subset \mathfrak{N}$ が $A_\alpha \xrightarrow{uw} A$ のとき，$\varphi(\pi(A_\alpha)) \to \varphi(\pi(A))$ $(\forall \varphi \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*)$ だから，$\{\pi(A_\alpha)\}$ は $\pi(A)$ に弱＊収束する．つまり $\pi(A_\alpha) \xrightarrow{uw} \pi(A)$．したがって π は τ^{uw}-連続である．さらに，$\pi(\mathfrak{N})$ が v.N. 代数であることは，〈定理 4.23〉よりわかる．▌

〈補題 4.32〉 任意の $\varphi \in \mathfrak{N}_*, \psi \in \mathfrak{M}_*$ に対して，$\varphi \otimes \psi \in (\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})_*$ が一意に存在して $\varphi \otimes \psi(A \otimes B) = \varphi(A)\psi(B)$ $(\forall A \in \mathfrak{N}, \forall B \in \mathfrak{M})$．

証明 $\varphi \in \mathfrak{N}_*, \psi \in \mathfrak{M}_*$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$ となる $\{x_n\}, \{u_n\} \subset \mathcal{H}$ と $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^2 < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$ となる $\{y_n\}, \{v_n\} \subset \mathcal{K}$ が存在して，$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, Au_n \rangle$，$\psi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y_n, Bv_n \rangle$．いま，$f_{mn} = x_m \otimes y_n$，$g_{mn} = u_m \otimes v_n \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ とおくと，$\sum_{m,n=1}^{\infty} \|f_{mn}\|^2 < \infty$，$\sum_{m,n=1}^{\infty} \|g_{mn}\|^2 < \infty$．よって $\varphi \otimes \psi \in (\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})_*$ が $\varphi \otimes \psi(X) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle f_{mn}, Xg_{mn} \rangle$ $(X \in \mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})$ により定まる．任意の $A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{M}$ に対して，

$$\varphi \otimes \psi(A \otimes B) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \langle x_m, Au_m \rangle \langle y_n, Bv_n \rangle = \varphi(A)\psi(B).$$

また，$\varphi \otimes \psi$ の一意性は，$\{A \otimes B\ ;\ A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{M}\}$ からとった有限個の線形結合の全体 $\mathfrak{N} \odot \mathfrak{M}$ が $\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M}$ で τ^{uw}-稠密であることから明らか．▌

$\{\varphi \otimes \psi\ ;\ \varphi \in \mathfrak{N}_*, \psi \in \mathfrak{M}_*\}$ からとった有限個の線形結合の全体を $\mathfrak{N}_* \odot \mathfrak{M}_*$ で表す．さらに $\mathfrak{N}_* \odot \mathfrak{M}_*$ の $(\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})_*$ におけるノルム閉包を $\mathfrak{N}_* \otimes \mathfrak{M}_*$ で表すと，

〈補題 4.33〉 $\mathfrak{N}_* \otimes \mathfrak{M}_* = (\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})_*$．

証明 任意の $f, g \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ に対して，$\omega(X) = \langle f, Xg \rangle$ $(X \in \mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})$ で定まる $\omega \in (\mathfrak{N} \otimes \mathfrak{M})_*$ が $\mathfrak{N}_* \otimes \mathfrak{M}_*$ に属することを示せばよい．$\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ が $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ で稠密であるから，$f, g \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$，すなわち $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$，$g = \sum_{j=1}^{m} u_j \otimes v_j$ として十分である．$\varphi_{ij}(A) = \langle x_i, Au_j \rangle$，$\psi_{ij}(B) = \langle y_i, Bv_j \rangle$ とおくと，〈補題 4.32〉より

$$\omega(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle x_i, Au_j \rangle \langle y_i, Bv_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij} \otimes \psi_{ij}(A \otimes B).$$

よって $\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij} \otimes \psi_{ij} \in \mathfrak{N}_* \odot \mathfrak{M}_*$．▌

〈定理 4.34〉 $\{\mathcal{H}_1, \pi\}$, $\{\mathcal{K}_1, \theta\}$ をそれぞれ $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ の正規表現とするとき, $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ の正規表現 $\{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1, \pi\otimes\theta\}$ が一意に存在して $\pi\otimes\theta(A\otimes B)=\pi(A)\otimes\theta(B)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}, \forall B\in\mathfrak{M})$. さらに, π, θ が忠実ならば, $\pi\otimes\theta$ も忠実である.

証明 π は $\mathfrak{N}$ の $\mathcal{H}_1$ 上の正規表現であるから, $\pi_*(\varphi)=\varphi\circ\pi$ $(\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*)$ と定めると,〈補題 4.31〉より有界線形写像 $\pi_*:\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*\to\mathfrak{N}_*$ が得られる. 同様に, 有界線形写像 $\theta_*:\boldsymbol{B}(\mathcal{K}_1)_*\to\mathfrak{M}_*$ が定まる. $X=\sum_{i=1}^n A_i\otimes B_i\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ に対して, $\Phi(X)=\sum_{i=1}^n\pi(A_i)\otimes\theta(B_i)$ とおく. $X=\sum_{i=1}^n A_i\otimes B_i=0$ のとき, 任意の $\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*$, $\psi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K}_1)_*$ に対して,

$$\varphi\otimes\psi\left(\sum_{i=1}^n\pi(A_i)\otimes\theta(B_i)\right)=\pi_*\varphi\otimes\theta_*\psi\left(\sum_{i=1}^n A_i\otimes B_i\right)=0.$$

〈定理 4.29〉の(3)と〈補題 4.33〉より $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K}_1)_*=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)_*$ となるから, $\sum_{i=1}^n\pi(A_i)\otimes\theta(B_i)=0$. よって $\Phi(X)$ は $X\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ の表し方に無関係に一意に定まる. これで線形写像 $\Phi:\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)$ が定義された. 任意の $X, Y\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ に対して, $\Phi(XY)=\Phi(X)\Phi(Y)$, $\Phi(X^*)=\Phi(X)^*$ はすぐにわかる. したがって, 任意の $X\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ に対して, $\Phi(X)^*\Phi(X)=\Phi(X^*X)$ だから

$$\|\Phi(X)\|^2=\|\Phi(X^*X)\|=\sup\{\langle f, \Phi(X^*X)f\rangle\ ;\ f\in\mathcal{H}_1\odot\mathcal{K}_1, \|f\|\leqq 1\}.$$

いま, $f=\sum_{j=1}^m u_j\otimes v_j\in\mathcal{H}_1\odot\mathcal{K}_1$, $\|f\|\leqq 1$ に対して, $\omega(X)=\langle f, \Phi(X)f\rangle$ $(X\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M})$ とおくと,

$$\begin{aligned}\omega(A\otimes B)&=\left\langle\sum_{j=1}^m u_j\otimes v_j, \pi(A)\otimes\theta(B)\left(\sum_{j=1}^m u_j\otimes v_j\right)\right\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^m\langle u_i, \pi(A)u_j\rangle\langle v_i, \theta(B)v_j\rangle=\sum_{i,j=1}^m\varphi_{ij}\otimes\psi_{ij}(A\otimes B).\end{aligned}$$

ここで $\varphi_{ij}(A)=\langle u_i, \pi(A)u_j\rangle$, $\psi_{ij}(B)=\langle v_i, \theta(B)v_j\rangle$. よって〈補題 4.32〉より, ω は $\omega=\sum_{i,j=1}^m\varphi_{ij}\otimes\psi_{ij}\in(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})_*$ に拡張される. 任意の $Y\in\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ に対して, Kaplansky の稠密定理よりネット $\{Y_\alpha\}\subset\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ が存在して $\|Y_\alpha\|\leqq\|Y\|$ かつ $Y_\alpha\xrightarrow{us^*}Y$. よって $Y_\alpha{}^*Y_\alpha\xrightarrow{uw}Y^*Y$ となり, $\omega(Y^*Y)=\lim_\alpha\omega(Y_\alpha{}^*Y_\alpha)\geqq 0$. したがって ω は正であり, 任意の $X\in\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ に対して,

$$\langle f, \Phi(X^*X)f\rangle=\omega(X^*X)\leqq\omega(\|X\|^2I)\leqq\|X\|^2.$$

これで $\|\Phi(X)\|\leqq\|X\|$ が示せた. よって Φ は $\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ 上で有界だから, Φ の共役写像 $\Phi^*:\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)^*\to(\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M})^*$ がとれる. $\omega\in(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})_*\longmapsto\omega\restriction(\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M})\in(\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M})^*$ が等距離写像であるから, $(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})_*$ は $(\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M})^*$ の閉部分空間とみなせる. 任意の $\varphi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*$, $\psi\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K}_1)_*$ に対して $\Phi^*(\varphi\otimes\psi)=\pi_*\varphi\otimes\theta_*\psi\in(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})_*$ であり, $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)_*\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K}_1)_*=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)_*$ であるから, $\Phi^*(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)_*)\subset(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})_*$ となる. したがって $\Phi^*\restriction\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)_*$ の共役写像を $\pi\otimes\theta$ とすれば, $\pi\otimes\theta:\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1)$ は τ^{uw} 位相 (i.e., 弱 * 位相) に関して連続な Φ の拡張である. $\pi\otimes\theta$ が * 準同型写像であるこ

とは，Φ が $\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ 上で＊準同型であることから容易に示せる．また，$\pi\otimes\theta$ が正規であることも τ^{uw}-連続性からすぐにわかる．したがって $\{\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{K}_1, \pi\otimes\theta\}$ が求める $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ の正規表現である．一意性は，$\mathfrak{N}\odot\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ で τ^{uw}-稠密であることと〈補題 4.31〉より明らか．最後に，π, θ が忠実のとき，$\{\mathcal{H}, \pi^{-1}\}$, $\{\mathcal{K}, \theta^{-1}\}$ はそれぞれ v.N. 代数 $\pi(\mathfrak{N}), \theta(\mathfrak{M})$ の正規表現である．よって $\pi(\mathfrak{N})\otimes\theta(\mathfrak{M})$ の正規表現 $\{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}, \pi^{-1}\otimes\theta^{-1}\}$ がつくれる．任意の $A\in\mathfrak{N}, B\in\mathfrak{M}$ に対して $\pi^{-1}\otimes\theta^{-1}(\pi\otimes\theta(A\otimes B))=A\otimes B$ であるから，$(\pi^{-1}\otimes\theta^{-1})\circ(\pi\otimes\theta)$ は $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ 上の恒等写像である．したがって $\pi\otimes\theta$ は忠実である．▮

〈定理 4.34〉の特別な場合として，α, β をそれぞれ $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ の＊自己同型写像（ゆえに正規表現）とするとき，$\alpha\otimes\beta(A\otimes B)=\alpha(A)\otimes\beta(B)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}, \forall B\in\mathfrak{M})$ を満たす $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ の＊自己同型写像 $\alpha\otimes\beta$ が一意に定まる．

この節の残りで C* 代数のテンソル積について説明する．以下，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を単位元をもつ C* 代数とする．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の代数的テンソル積を $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ で表す．$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の定義は次のようにすればよい．任意の $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ に対して，直積空間 $\mathcal{A}^*\times\mathcal{B}^*$ 上の双線形な汎函数 $A\otimes B$ を $A\otimes B(\varphi, \psi)=\varphi(A)\psi(B)$ $(\varphi\in\mathcal{A}^*, \psi\in\mathcal{B}^*)$ で定める．$\{A\otimes B\,;\,A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}\}$ からとった有限個の線形結合の全体からなる線形空間として $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ を定義する．$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ は，$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=A_1A_2\otimes B_1B_2$, $(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*$ により定まる演算で単位元をもつ＊代数となる．$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上のノルム $\|\cdot\|_\alpha$ は，$\|XY\|_\alpha\leqq\|X\|_\alpha\|Y\|_\alpha$, $\|X^*X\|_\alpha=\|X\|_\alpha{}^2$ $(\forall X, Y\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$ を満たすとき，$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の **C* ノルム** といわれる．このとき，$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ を $\|\cdot\|_\alpha$ で完備化した空間 $\mathcal{A}\otimes_\alpha\mathcal{B}$ は C* 代数となる．$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上のノルム $\|\cdot\|_\alpha$ が**積ノルム** (cross-norm) であるとは，任意の $A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}$ に対して $\|A\otimes B\|_\alpha=\|A\|\|B\|$ が成立するときをいう．

任意の $\varphi\in\mathcal{A}^*, \psi\in\mathcal{B}^*$ に対して，$\varphi\otimes\psi(A\otimes B)=\varphi(A)\psi(B)$ $(A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B})$ により $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の線形汎函数 $\varphi\otimes\psi$ が定まる．また，$\{\mathcal{H}, \pi\}, \{\mathcal{K}, \theta\}$ をそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の表現とするとき，$\pi\otimes\theta(A\otimes B)=\pi(A)\otimes\theta(B)$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall B\in\mathcal{B})$ を満たす $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上の表現 $\pi\otimes\theta$ (i.e., ＊準同型写像 $\pi\otimes\theta : \mathcal{A}\odot\mathcal{B}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$) が一意に定まる．

$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の C* ノルムは一般にいくつもあるが，その中で次に定義する 2 つのノルムが有用である．

［定義 4.4］ 各 $X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ に対して，

$$\|X\|_{\min}\equiv\sup\{\|\pi\otimes\theta(X)\|\ ;\ \pi,\theta \text{ はそれぞれ } \mathcal{A},\mathcal{B} \text{ の表現}\},$$

$$\|X\|_{\max}\equiv\sup\{\|\pi(X)\|\ ;\ \pi \text{ は } \mathcal{A}\odot\mathcal{B} \text{ の表現}\}.$$

次の補題で示すように，$\|\cdot\|_{\min}$ および $\|\cdot\|_{\max}$ は $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の C* ノルムになる．$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ を $\|\cdot\|_{\min}$ で完備化した C* 代数 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ を $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の **単射的** (injective) **C* テンソル積**といい， $\|\cdot\|_{\max}$ で完備化した C* 代数 $\mathcal{A}\otimes_{\max}\mathcal{B}$ を**射影的** (projective) **C* テンソル積**という．

〈補題 4.35〉 (1) $\|\cdot\|_{\min}$ および $\|\cdot\|_{\max}$ は $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の C* ノルムかつ積ノルムである．

(2) 任意の $X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ に対して，

$$\|X\|_{\min}=\sup\left\{\frac{\varphi\otimes\psi(Y^*X^*XY)^{1/2}}{\varphi\otimes\psi(Y^*Y)^{1/2}}\ ;\ Y\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B},\ \varphi\in\mathcal{A}^*_+,\ \psi\in\mathcal{B}^*_+\right\}.$$

証明　(1)：$\varphi\in\mathcal{A}^*_+$, $\psi\in\mathcal{B}^*_+$ による $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の GNS 表現をそれぞれ $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$, $\{\mathcal{H}_\psi,\pi_\psi,x_\psi\}$ とする．任意の $X=\sum_{i=1}^n A_i\otimes B_i\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$, $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$, $\psi\in\mathcal{B}^*_+$ に対して，

$$X(\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^n\varphi(A_i)\psi(B_i)=\sum_{i=1}^n\langle x_\varphi,\pi_\varphi(A_i)x_\varphi\rangle\langle y_\psi,\pi_\psi(B_i)y_\psi\rangle$$
$$=\langle x_\varphi\otimes y_\psi,\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(X)(x_\varphi\otimes y_\psi)\rangle$$

となるから，

$$|X(\varphi,\psi)|\leqq\|\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(X)\|\|x_\varphi\otimes y_\psi\|^2\leqq\|X\|_{\min}\|\varphi\|\|\psi\|.$$

よって，$\|X\|_{\min}=0$ ならば $X=0$．$\|X\|_{\min}\leqq\|X\|_{\max}$ だから，$\|X\|_{\max}=0$ ならば $X=0$ もいえる．$\|\cdot\|_{\min}$, $\|\cdot\|_{\max}$ が C* ノルムになるための他の条件は，定義より明らかであろう．また，$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の任意の表現 π に対して，$A\in\mathcal{A}\longmapsto\pi(A\otimes I)$, $B\in\mathcal{B}\longmapsto\pi(I\otimes B)$ が $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の表現になるから，$\|\pi(A\otimes B)\|=\|\pi(A\otimes I)\pi(I\otimes B)\|\leqq\|A\|\|B\|$ $(\forall A\in\mathcal{A},\forall B\in\mathcal{B})$．さらに $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の忠実表現 π,θ をとると，〈補題 4.28〉の (1) より $\|\pi\otimes\theta(A\otimes B)\|=\|\pi(A)\|\|\theta(B)\|=\|A\|\|B\|$．よって $\|A\|\|B\|\leqq\|A\otimes B\|_{\min}\leqq\|A\otimes B\|_{\max}\leqq\|A\|\|B\|$ となるから，$\|\cdot\|_{\min}$, $\|\cdot\|_{\max}$ は積ノルムである．

(2)：任意の $X,Y\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$, $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$, $\psi\in\mathcal{B}^*_+$ に対して，

$$\varphi\otimes\psi(Y^*X^*XY)=\langle x_\varphi\otimes y_\psi,\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(Y^*X^*XY)(x_\varphi\otimes y_\psi)\rangle$$
$$=\langle\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(Y)(x_\varphi\otimes y_\psi),\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(X^*X)\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(Y)(x_\varphi\otimes y_\psi)\rangle.$$

ここで，$x_\varphi\otimes y_\psi$ は $\pi_\varphi\otimes\pi_\psi(\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$ に関する巡回ベクトルとなるから，証明すべき等式の右辺は

$$\sup\{\|\pi\otimes\theta(X)\|\ ;\ \pi,\theta \text{ はそれぞれ } \mathcal{A},\mathcal{B} \text{ の巡回表現}\}$$

に等しい．ところで〈定理 3.26〉より，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ の任意の非縮退表現 π,θ はそれぞれ巡回表現の族 $\{\pi_j\ ;\ j\in J\}$, $\{\theta_k\ ;\ k\in K\}$ の直和で書ける．このとき，簡単な計算から，$\|\pi\otimes\theta(X)\|$

$=\sup\{\|\pi_j\otimes\theta_k(X)\|\,;\,j\in J, k\in K\}$ $(\forall X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$ がわかる．したがって，求める等式が得られる．∎

$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ 上の任意の C* ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ に対して，C* 代数 $\mathcal{A}\otimes_\alpha\mathcal{B}$ の忠実表現 π をとれば，$\|X\|_\alpha=\|\pi(X)\|\leqq\|X\|_{\max}$ $(\forall X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$．よって $\|\cdot\|_{\max}$ は $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の C* ノルムのうち最大なものである．ところで，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ のいずれかが可換ならば，$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の C* ノルムはただ 1 つであることが知られている．この事実を使って，$\|\cdot\|_{\min}$ が $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の C* ノルムのうち最小なものであることが証明できる．したがって，〈補題 4.35〉の（1）より，$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の任意の C* ノルムが積ノルムであることがわかる．なお，任意の C* 代数 $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ の C* ノルムがただ 1 つであるとき，$\mathcal{A}$ は**核型** (nuclear) C* 代数といわれる．

最後に，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ の表現に対して，それらのテンソル積としての $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ の表現がつくれることを示そう．

〈定理 4.36〉 $\{\mathcal{H},\pi\},\{\mathcal{K},\theta\}$ をそれぞれ $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の表現とするとき，$\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ の表現 $\{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K},\pi\otimes\theta\}$ が一意に存在して $\pi\otimes\theta(A\otimes B)=\pi(A)\otimes\theta(B)$ $(\forall A\in\mathcal{A},\forall B\in\mathcal{B})$．さらに，$\pi,\theta$ が忠実ならば，$\pi\otimes\theta$ も忠実である．

証明 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ の定義より，$\pi\otimes\theta:\mathcal{A}\odot\mathcal{B}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ は $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ 上にまで一意に拡張される．この拡張を同じ $\pi\otimes\theta$ で書くと，$\pi\otimes\theta:\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ が＊準同型写像であることは容易にわかる．よって $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ の表現 $\{\mathcal{H}\otimes\mathcal{K},\pi\otimes\theta\}$ は一意に存在する．次に，π,θ が忠実であるとして，

$$\mathcal{E}=\mathrm{co}\{\varphi\in\mathcal{A}^*_+\,;\,\varphi(A)=\langle x,\pi(A)x\rangle,\,x\in\mathcal{H}\},$$
$$\mathcal{F}=\mathrm{co}\{\psi\in\mathcal{B}^*_+\,;\,\psi(B)=\langle y,\theta(B)y\rangle,\,y\in\mathcal{K}\}$$

とおく．凸錐 $\mathcal{E}$ の弱＊閉包 (i. e., $\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})$-閉包)が $\mathcal{A}^*_+$ と一致しないとすると，Hahn-Banach の定理より，$\varphi_0\in\mathcal{A}^*_+$ と $A\in\mathcal{A}_{sa}$ が存在して $\varphi_0(A)<0=\inf\{\varphi(A)\,;\,\varphi\in\mathcal{E}\}$．このとき，$\langle x,\pi(A)x\rangle\geqq0$ $(\forall x\in\mathcal{H})$ であるから $\pi(A)\geqq0$．よって，π が忠実だから，$A\geqq0$ となり $\varphi_0(A)<0$ に矛盾する．したがって $\mathcal{E}$ の弱＊閉包は $\mathcal{A}^*_+$ と一致する．同様に $\mathcal{F}$ の弱＊閉包は $\mathcal{B}^*_+$ と一致する．そこで，任意の $X,Y\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$, $\varphi\in\mathcal{A}^*_+$, $\psi\in\mathcal{B}^*_+$ に対して，

$$\varphi\otimes\psi(Y^*X^*XY)\leqq\|\pi\otimes\theta(X)\|^2\varphi\otimes\psi(Y^*Y)$$

を示す．$\varphi(A)=\langle x,\pi(A)x\rangle$, $\psi(B)=\langle y,\theta(B)y\rangle$ のとき，$\varphi\otimes\psi(X)=\langle x\otimes y,\pi\otimes\theta(X)(x\otimes y)\rangle$ $(\forall X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$ より，上の不等式は成立する．よって，任意の $\varphi\in\mathcal{E},\psi\in\mathcal{F}$ に対して，上の不等式は成立する．任意の $\varphi\in\mathcal{A}^*_+,\psi\in\mathcal{B}^*_+$ に対しては，$\varphi_j\to\varphi,\psi_k\to\psi$ (弱＊収束) するネット $\{\varphi_j\}\subset\mathcal{E},\{\psi_k\}\subset\mathcal{F}$ をとれば，$\varphi_j\otimes\psi_k(X)\to\varphi\otimes\psi(X)$ $(\forall X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$ よ

り，上の不等式は成立する．したがって〈補題 4.35〉の（2）より，$\|X\|_{\min}=\|\pi\otimes\theta(X)\|$ $(\forall X\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B})$．これで $\pi\otimes\theta$ が忠実であることが示せた．▌

初めから $\mathcal{A}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{B}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ のとき，〈定理 4.36〉より，$\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ は $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上で $\{A\otimes B\,;\,A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$ から生成される C* 代数として実現される．この意味で $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ は最も自然な C* テンソル積であり，通常 $\mathcal{A}\otimes_{\min}\mathcal{B}$ を単に $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ と書き，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ の **C* テンソル積**と呼ぶ．

4.5 射影作用素と σ-有限 v.N. 代数

この節では，いままで様々なところで使われてきた射影作用素を総括的に取りあげ，v.N. 代数の分類などに必要な定理を証明する．また，応用上有用な v.N. 代数である σ-有限 v.N. 代数について言及する．以下，射影作用素を単に射影という．v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に属する射影の全体を $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ で表す．また，$\mathfrak{N}$ に属するユニタリー作用素の全体を $\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ で表す．

任意の族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$\bigvee_{j\in J}E_j$ は $\mathcal{H}$ から $\bigcup_{j\in J}E_j\mathcal{H}$ の張る閉部分空間への射影を表し，$\bigwedge_{j\in J}E_j$ は $\mathcal{H}$ から $\bigcap_{j\in J}E_j\mathcal{H}$ への射影を表す．$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}')$ ならば，$UE_j\mathcal{H}=E_jU\mathcal{H}=E_j\mathcal{H}$ であるから，$[\bigvee_{j\in J}E_j,U]=0$，$[\bigwedge_{j\in J}E_j,U]=0$ がわかる．したがって $\bigvee_{j\in J}E_j\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$\bigwedge_{j\in J}E_j\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ である．このことより，

〈定理 4.37〉 $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ は完備直相補束である．

ここで，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ の直補元は $E^\perp=I-E$ である．また，$\bigvee_{j\in J}E_j$，$\bigwedge_{j\in J}E_j$ がそれぞれ $\sup\{E_j\,;\,j\in J\}$，$\inf\{E_j\,;\,j\in J\}$ である．

ところで，〈定理 4.5〉の註より，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ は $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ によって張られる複素線形空間のノルム閉包である．したがって $\mathfrak{N}=\mathcal{P}(\mathfrak{N})''$．すなわち，v.N. 代数はその射影の全体によって生成される．このことからも，v.N. 代数の研究には射影作用素の研究が重要であることが納得できよう．

問 族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$E_i\perp E_j$ $(i\neq j)$ のとき $\bigvee_{j\in J}E_j=\sum_{j\in J}E_j$ であることを示せ．

［**定義 4.5**］ v.N. 代数に対して，$\mathfrak{Z}\equiv\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}'$ を $\mathfrak{N}$ の**中心** (center) といい，

$\mathfrak{Z}=\boldsymbol{C}I$ のとき $\mathfrak{N}$ を**因子** (factor) という.

$\mathfrak{Z}$ は当然 v.N. 代数であり, $\mathfrak{N}\vee\mathfrak{N}'$($\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{N}'$ によって生成される v.N. 代数) は $\mathfrak{Z}'$ に等しい. $\mathfrak{Z}$ に属する $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ を**中心射影** (central projection) といい, この全体を $\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ で表す.

〈定理 4.38〉 $A\in\mathfrak{N}$ に対して, $\mathrm{z}(A)=\wedge\{E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})\ ;\ EA=A\}$ とおくと, $\mathrm{z}(A)$ は $\mathcal{H}$ から $[\![\mathfrak{N}A\mathcal{H}]\!]$ への射影である.

証明 $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$, $EA=A$ のとき, $E\mathcal{H}\supset A\mathcal{H}$ となるから $\mathrm{z}(A)\mathcal{H}\supset A\mathcal{H}$. よって $\mathrm{z}(A)A=A$. E_A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{L}=[\![\mathfrak{N}A\mathcal{H}]\!]$ への射影とすると, $\mathfrak{N}\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ かつ $\mathfrak{N}'\mathcal{L}\subset\mathcal{L}$ であるから, $E_A\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}'=\mathfrak{Z}$. また, $I\in\mathfrak{N}$ より, $\mathfrak{N}A\mathcal{H}\supset A\mathcal{H}$ となり $E_AA=A$. よって $\mathrm{z}(A)\leqq E_A$. 他方, $\mathfrak{N}A\mathcal{H}\subset\mathfrak{N}\mathrm{z}(A)\mathcal{H}\subset\mathrm{z}(A)\mathcal{H}$ より $E_A\leqq\mathrm{z}(A)$. したがって $\mathrm{z}(A)=E_A$. ▌

$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $\mathrm{z}(E)$ は E の**中心台** (central support) と呼ばれ, これは E を含む最小の中心射影である.

問 $\{E_j\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $\mathrm{z}(\vee E_j)=\vee\mathrm{z}(E_j)$ を示せ.

〈定理 4.21〉において, $\overline{\mathfrak{N}}^{us*}=\mathfrak{N}$ のとき, 射影 $E:\mathcal{H}\to\{\mathfrak{N}\mathcal{H}\}^-$ に対して, $\mathfrak{N}$ の $\mathrm{ran}\,E=E\mathcal{H}$ への制限 $\mathfrak{N}_E$ は E を単位元とする v.N. 代数になることを示した. 同様にして, 任意の $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $\mathfrak{N}_E$ および $(\mathfrak{N}')_E$ も $E\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数になることが示せる. さらに,

〈補題 4.39〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ と $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $(\mathfrak{N}_E)'=(\mathfrak{N}')_E$.

証明 $E\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数 $\mathfrak{N}_E$ は $E\mathfrak{N}E$ と同一視できて, 任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $A'\in\mathfrak{N}'$ に対して $[EAE, EA'E]=EAA'E-EA'AE=0$ であるから, $\mathfrak{N}_E\subset((\mathfrak{N}')_E)'$. 逆に, 任意の $B\in((\mathfrak{N}')_E)'\subset\boldsymbol{B}(E\mathcal{H})$ に対して, $A'\in\mathfrak{N}'$ ならば, $E\in\mathfrak{N}$ より $EBEA'=EBEEA'E=EA'EEBE=A'EBE$. よって $EBE\in\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$ となるから $B\in\mathfrak{N}_E$. したがって $\mathfrak{N}_E=((\mathfrak{N}')_E)'$. つまり $(\mathfrak{N}_E)'=(\mathfrak{N}')_E$. ▌

$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $\mathfrak{N}'_E$ を E によって $\mathfrak{N}'$ から導かれた v.N. 代数というが, このとき, 写像 $A'\in\mathfrak{N}'\mapsto A'_E=A'\restriction E\mathcal{H}\in\mathfrak{N}'_E$ は τ^{uw}-連続な $*$ 準同型写像である. また, これが $*$ 同型写像になるための必要十分条件は, 〈定理 4.38〉より, $\mathrm{z}(E)=I$ であることが示せる. したがって, $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $A'\in$

$\mathfrak{N}'_{z(E)} \mapsto A'_E \in \mathfrak{N}'_E$ が＊同型写像となるから，$\mathfrak{N}'_{z(E)}$ の中心 $\mathfrak{Z}_{z(E)}$ の像 $\mathfrak{Z}_E$ は $\mathfrak{N}'_E$ の中心と一致する．つまり $\mathfrak{N}_E \cap \mathfrak{N}'_E = \mathfrak{Z}_E$ がわかる．

さて，2つの射影 $E, F \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が**同値**（$E \sim F$ と書く）であるとは，ある半等距離作用素 $W \in \mathfrak{N}$ が存在して $E = W^*W$, $F = WW^*$ と表せる場合をいう．この関係～は $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に同値関係を与える．一般に，W^*W が射影ならば WW^* も射影になり，W^*W を W の**初期射影**，WW^* を W の**終射影**という．

E が F の部分射影 F_1(i.e., $F_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$, $F_1 \leqq F$) に同値であるとき，$E \prec F$ と書く．この $\prec$ は $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に半順序を与える．これらに関して，次の事実を容易に示すことができる．

1° $P_x = x \otimes \bar{x}, x \in \mathcal{H}$ に対して $E \prec P_x$ ならば，ある $y \in \mathcal{H}$ が存在して $E = P_y = y \otimes \bar{y}$ と書ける．

2° $E \sim F$ (resp. $E \prec F$) ならば $z(E) = z(F)$ (resp. $z(E) \leqq z(F)$).

3° $E \sim F$, $E = W^*W$, $F = WW^*$ ならば，$A \in E\mathfrak{N}E \mapsto WAW^* \in F\mathfrak{N}F$ は＊同型写像である．

問 命題1°～3°を証明せよ．

〈補題 4.40〉 2つの互いに直交する射影の族 $\{E_j\,;\, j \in J\}$, $\{F_j\,;\, j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$E_j \sim F_j$ ($\forall j \in J$) ならば $\sum_{j\in J} E_j \sim \sum_{j \in J} F_j$.

証明 $E_j \sim F_j$ より半等距離作用素 $W_j \in \mathfrak{N}$ が存在して $E_j = W_j^* W_j$ かつ $F_j = W_j W_j^*$. 任意の有限な $K \subset J$ に対して，$W_K = \sum_{j \in K} W_j$ とおく．各 $x \in \mathcal{H}$ に対して，$\{W_j x\,;\, j \in J\}$ は互いに直交し，$\sum_{j\in J} \|W_j x\|^2 = \sum_{j \in J} \langle x, W_j^* W_j x\rangle = \sum_{j\in J} \langle x, E_j x\rangle = \langle x, (\sum_{j\in J} E_j)x\rangle$. これより，ネット $\{W_K\,;\, K \subset J\}$ は $W \in \mathfrak{N}$ に τ^s-収束する．つまり $W = \sum_{j\in J} W_j$ (τ^s-収束). 同様に $W^* = \sum_{j\in J} W_j^*$ (τ^s-収束)．ところで $W_i^* W_j = \delta_{ij} E_i$ であるから，$W^*W = \sum_{j\in J} E_j$. 同様にして $WW^* = \sum_{j \in J} F_j$. ▮

〈定理 4.41〉 von Neumann の Schröder-Bernstein 型定理：$E, F \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$E \prec F$ かつ $F \prec E$ ならば $E \sim F$ である．

証明 $E \prec F$ かつ $F \prec E$ より，$E_1, F_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $E_1 \leqq E$, $F_1 \leqq F$ かつ $E \sim F_1$, $F \sim E_1$ を満たす．よって半等距離作用素 $W, V \in \mathfrak{N}$ が存在して，$E = W^*W$, $F_1 = WW^*$ かつ $F = V^*V$, $E_1 = VV^*$, いま，$E_0 = E$, $F_0 = F$ とおき，$E_n = VF_{n-1}V^*$, $F_n = WE_{n-1}W^*$

$(n\in\boldsymbol{N})$とおくと，$\{E_n\}$ および $\{F_n\}$ は射影の減少列となる．さらに$E_\infty=\bigwedge_{n=1}^{\infty}E_n$, $F_\infty=\bigwedge_{n=1}^{\infty}F_n$ とおくと，$E=\sum_{n=0}^{\infty}(E_n-E_{n+1})+E_\infty$, $F=\sum_{n=0}^{\infty}(F_n-F_{n+1})+F_\infty$ と書ける．明らかに，$W(E_n-E_{n+1})W^*=F_{n+1}-F_{n+2}$, $V(F_n-F_{n+1})V^*=E_{n+1}-E_{n+2}$, $WE_\infty W^*=F_\infty$ であるから，$E_n-E_{n+1}\sim F_{n+1}-F_{n+2}$, $F_n-F_{n+1}\sim E_{n+1}-E_{n+2}$ かつ $E_\infty\sim F_\infty$．したがって〈補題4.40〉より，

$$E=\sum_{n=0}^{\infty}(E_{2n}-E_{2n+1})+\sum_{n=0}^{\infty}(E_{2n+1}-E_{2n+2})+E_\infty$$
$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}(F_{2n+1}-F_{2n+2})+\sum_{n=0}^{\infty}(F_{2n}-F_{2n+1})+F_\infty=F. \ ▌$$

〈補題4.4〉で $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $A\geqq 0$ の台 $\mathrm{s}(A)$ を定義したが，一般の $A\in\mathfrak{R}$ に対して，$EA=A$ となる最小の射影 $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ を A の**左台**といい，$\mathrm{s}_l(A)$ で表す．また，$AE=A$ となる最小の $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ を A の**右台**といい，$\mathrm{s}_r(A)$ で表す．この定義より，$\mathrm{s}_l(A):\mathcal{H}\to\overline{\mathrm{ran}}\,A$, $\mathrm{s}_r(A):\mathcal{H}\to\overline{\mathrm{ran}}\,A^*$ であり，したがって $\mathrm{s}_r(A)=\mathrm{s}_l(A^*)$．また，$K_A$ を $\mathcal{H}$ から $\ker A\equiv\{x\in\mathcal{H}\,;\,Ax=0\}$ への射影とすると，$\mathrm{s}_r(A)=K_A{}^\perp$ とも書ける．特に $A=A^*$ のときは，$\mathrm{s}_r(A)=\mathrm{s}_l(A)$ となり，これを $\mathrm{s}(A)$ と書いて A の**台**という．

〈補題4.42〉 任意の $A\in\mathfrak{R}$ に対して，$\mathrm{s}_r(A)\sim\mathrm{s}_l(A)$.

証明 A の極分解を $A=W|A|$ と書くと，$\mathrm{ran}\,W=\overline{\mathrm{ran}}\,A$ より $\mathrm{s}_l(A)=WW^*$．また，$A^*=|A|W^*$, $\mathrm{ran}\,W^*=\overline{\mathrm{ran}}\,|A|$ より，$\mathrm{s}_r(A)=\mathrm{s}(|A|)=W^*W$．よって $\mathrm{s}_r(A)\sim\mathrm{s}_l(A)$. ▌

〈補題4.43〉 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ に対して，$E\vee F-E\sim F-E\wedge F$.

証明 $\mathcal{K}=E\mathcal{H}$, $\mathcal{L}=F\mathcal{H}$, $\mathcal{N}=\{x\in\mathcal{H}\,;\,E^\perp Fx=0\}$ とおくと，$\mathcal{N}=\mathcal{L}^\perp\oplus(\mathcal{K}\cap\mathcal{L})$ である．よって $\overline{\mathrm{ran}}(FE^\perp)=\overline{\mathrm{ran}}(E^\perp F)^*=\mathcal{N}^\perp=(F-E\wedge F)\mathcal{H}$ より，$\mathrm{s}_l(FE^\perp)=F-E\wedge F$. E,F を $F^\perp,E^\perp$ と取り替えれば，同様に $\mathrm{s}_l(E^\perp F)=E^\perp-F^\perp\wedge E^\perp=(I-E)-(I-E\vee F)=E\vee F-E$. よって $\mathrm{s}_r(FE^\perp)=\mathrm{s}_l(E^\perp F)=E\vee F-E$. したがって〈補題4.42〉より，$E\vee F-E\sim F-E\wedge F$. ▌

〈補題4.44〉 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ に対して，次は同値である：(1) $E\mathfrak{R}F\neq\{0\}$；(2) $E_1,F_1\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ が存在して $0\neq E_1\leqq E$, $0\neq F_1\leqq F$ かつ $E_1\sim F_1$；(3) $\mathrm{z}(E)\mathrm{z}(F)\neq 0$.

証明 (1)⇒(2)：$A\in\mathfrak{R}$, $EAF\neq 0$ のとき，$E_1=\mathrm{s}_l(EAF)$, $F_1=\mathrm{s}_r(EAF)$ とおけばよい．

(2)⇒(1)：半等距離作用素 $W\in\mathfrak{R}$ により $E\geqq E_1=W^*W\neq 0$, $F\geqq F_1=WW^*\neq 0$ と表せるから, $EW^*F=W^*\neq 0$.

(1)⇒(3)：$z(E)z(F)=0$ とすると, $EAF=z(E)EAFz(F)=0$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$. これは(1)に矛盾する.

(3)⇒(1)：$E\mathfrak{R}F=\{0\}$ とすると, 〈定理 4.38〉より $z(F)\mathcal{H}=[\![\mathfrak{R}F\mathcal{H}]\!]$ であるから $Ez(F)=0$. したがって $z(E)z(F)=0$. ▮

2つの射影 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ が**互いに素**（$E\between F$ と書く）であるとは, $z(E)z(F)=0$ の場合をいう. これは E,F が直交する (i.e., $E\perp F$) ことよりも強い条件である.

問 $E\between E^\perp\Longleftrightarrow E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ を示せ.

〈定理 4.45〉 比較定理：$E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ に対して, $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $EP\prec FP$ かつ $FP^\perp\prec EP^\perp$.

証明 $\{E_j\,;\,j\in J\},\{F_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ を $E_j\sim F_j$, $E_j\leqq E$, $F_j\leqq F$ を満たす射影の2つの直交族で極大なものとする(これは Zorn の補題より常に存在する). いま $E_0=\sum_{j\in J}E_j$, $F_0=\sum_{j\in J}F_j$ とおくと, 〈補題 4.40〉より $E_0\sim F_0$ である. また, 族の極大性より, $E_1\leqq E-E_0$, $F_1\leqq F-F_0$ かつ $E_1\sim F_1$ となる 0 以外の $E_1,F_1\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ は存在しない. したがって〈補題 4.44〉より, $z(E-E_0)z(F-F_0)=0$. すなわち, $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $E-E_0\leqq P^\perp$, $F-F_0\leqq P$. よって $(E-E_0)P=0$, $(F-F_0)P^\perp=0$. ところで, $E\sim F$ かつ $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ ならば $EP\sim FP$ であるから, $EP=E_0P\sim F_0P\leqq FP$, $FP^\perp=F_0P^\perp\sim E_0P^\perp\leqq EP^\perp$. ▮

この定理より, $\mathfrak{R}$ が因子のときは, $E\prec F$ または $F\prec E$ のいずれかが成立することがわかる.

問 $E_1,E_2,F_1,F_2\in\mathcal{P}(\mathfrak{R})$ が $E_1\perp E_2$, $F_1\perp F_2$, $E_1+E_2=F_1+F_2$ を満たすとき, $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $E_1P\prec F_1P$ かつ $E_2P^\perp\prec F_2P^\perp$ となることを示せ.

この節の最後に σ-有限 v.N. 代数について議論しておこう.

[定義 4.6] v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ が **σ-有限**であるとは, $\mathfrak{R}$ に含まれる任意の直交射影族が高々可算である場合をいう.

例えば, 可分な Hilbert 空間上の v.N. 代数は σ-有限である (逆は不成立).

したがって，σ-有限でない v.N. 代数はあまり重要でない．

〈定理 4.46〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に関して，次は同値である．

（1） $\mathfrak{N}$ が σ-有限．

（2） $\mathfrak{N}$ に関する分離集合 $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$ (i.e., $A\in\mathfrak{N}$, $Ax=0$, $\forall x\in\mathcal{L}\Rightarrow A=0$) で可算なものが存在する．

（3） $\mathfrak{N}$ 上に忠実な正規状態が存在する．

（4） 巡回かつ分離ベクトルをもつ v.N. 代数で $\mathfrak{N}$ に * 同型なものが存在する．

証明 （1）⇒（2）：$\mathcal{L}=\{x_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{H}$ を $\{\mathfrak{N}'x_i\}^-\perp\{\mathfrak{N}'x_j\}^-$ $(i\neq j)$ となる極大族とする．$\mathcal{H}$ から $\{\mathfrak{N}'x_j\}^-$ への射影を E_j とすると，$\{E_j\,;\,j\in J\}$ は $\mathfrak{N}$ の直交射影族である．よって（1）より，J は高々可算である．また，$\mathcal{L}$ の極大性より $\sum_{j\in J}E_j=I$. よって $\mathcal{L}$ は $\mathfrak{N}'$ に関して巡回的となり (i.e., $[\![\mathfrak{N}'\mathcal{L}]\!]=\mathcal{H}$)，したがって $\mathfrak{N}$ に関して分離的である．

（2）⇒（3）：$\{x_n\}$ を可算な分離集合とし，$\varphi\in\mathfrak{N}_*$ を $\varphi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|x_n\|^{-2}\langle x_n, Ax_n\rangle$ と定める．$A\in\mathfrak{N}, \varphi(A^*A)=0$ ならば，$Ax_n=0$ $(\forall n\in \boldsymbol{N})$ となり $A=0$. すなわち φ は忠実である．

（3）⇒（4）：忠実な正規状態 φ による $\mathfrak{N}$ の GNS 巡回表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ を考える．$A_\alpha\in\mathfrak{N}_+, A_\alpha\uparrow A$ のとき，任意の $B\in\mathfrak{N}$ に対して，$B^*A_\alpha B\uparrow B^*AB$ であるから，

$$\begin{aligned}\langle\pi_\varphi(B)x_\varphi, \pi_\varphi(A)\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle&=\varphi(B^*AB)=\sup_\alpha\varphi(B^*A_\alpha B)\\&=\sup_\alpha\langle\pi_\varphi(B)x_\varphi, \pi_\varphi(A_\alpha)\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle.\end{aligned}$$

x_φ が $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ に関する巡回ベクトルであるから，$\pi_\varphi(A_\alpha)\uparrow\pi_\varphi(A)$. よって π_φ は正規表現となり，〈補題 4.31〉より $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ は v.N. 代数である．$A\in\mathfrak{N}$, $\pi_\varphi(A)x_\varphi=0$ ならば，$\varphi(A^*A)=\|\pi_\varphi(A)x_\varphi\|^2=0$ より $A=0$. したがって π_φ は忠実表現であり，x_φ は $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ に関する分離ベクトルでもある．

（4）⇒（1）：$\mathfrak{M}$ が巡回かつ分離ベクトル x_0 をもつ v.N. 代数とし，$\pi:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ を * 同型写像とする．直交射影族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$\{\pi(E_j)\,;\,j\in J\}$ が $\mathfrak{M}$ の直交射影族となるから，$\sum_{j\in J}\|\pi(E_j)x_0\|^2\leqq\|x_0\|^2<\infty$. よって，$\pi(E_j)x_0\neq0$, すなわち $E_j\neq0$ となる $j\in J$ は高々可算である．▮

なお，次の諸結果は有用である．

1° $\mathcal{J}$ を v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の左イデアルとするとき，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が一意に存在して $\bar{\mathcal{J}}^{uw}=\mathfrak{N}E$. さらに，$\mathcal{J}$ が両側イデアルのときは，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ にとれる．

2° $\mathfrak{N},\mathfrak{M}$ を 2 つの v.N. 代数とし，$\pi:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ を * 同型写像とするとき，π

は τ^{uw}–連続である (〈補題 4.31〉参照).

3°　v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の正規状態 φ による GNS 表現を $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ とするとき，π_φ は正規表現であり，$\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ は v.N. 代数である (〈定理 4.46〉の証明 (3) ⇒ (4) を参照).

4°　v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に関して，次は同値である：(1) $\mathfrak{N}$ が可分な Hilbert 空間上に忠実な正規表現をもつ；(2) $\mathfrak{N}$ が σ–有限で可算個の元で生成される；(3) $\mathfrak{N}_*$ がノルムで可分である.

4.6　v.N. 代数の型

v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ において，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ とすると，$\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_E\oplus\mathfrak{N}_{E^\perp}$ と表せるから，$\mathfrak{N}$ の研究は $\mathfrak{N}$ より小さい v.N. 代数 $\mathfrak{N}_E, \mathfrak{N}_{E^\perp}$ の研究に帰することができる．そこで，v.N. 代数はどのような v.N. 部分代数の直和に分解されるかを調べてみよう．まず，前節で導入した $\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ の同値関係 $\sim$ と半順序 $\prec$ を使って，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ をいくつかの型に分類しよう.

［**定義 4.7**］　射影 $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に関して次のように定める.

(1)　E が**可換** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $E\mathfrak{N}E$ が可換.

(2)　E が**有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$E\sim F\leqq E$ ならば $F=E$.

(3)　E が**無限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ E が有限でない.

(4)　E が**固有無限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して，PE が 0 または無限である.

(5)　E が**純無限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $0\neq F\leqq E$ となる有限な $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在しない.

［**定義 4.8**］　v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ を次のように分類する.

(1)　$\mathfrak{N}$ が**有限** (finite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 恒等作用素 I が有限.

(2)　$\mathfrak{N}$ が**半有限** (semifinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して，$0\neq F\leqq E$ となる有限な $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在する.

(3)　$\mathfrak{N}$ が**固有無限** (properly infinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I が固有無限.

(4)　$\mathfrak{N}$ が**純無限** (purely infinite) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ I が純無限.

(5)　$\mathfrak{N}$ が **I 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して，$0\neq F\leqq E$ となる可換

な $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在する.

（6） $\mathfrak{N}$ が **II 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が半有限で，0 以外の可換射影を含まない.

（7） $\mathfrak{N}$ が **III 型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が 0 以外の有限射影を含まない.

（8） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{I}_{\text{有限}}$**型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が有限な I 型.

（9） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{I}_\infty$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が固有無限な I 型.

（10） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{II}_1$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が有限な II 型.

（11） $\mathfrak{N}$ が $\mathbf{II}_\infty$ **型** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{N}$ が固有無限な II 型.

上の定義で（4）と（7）は同じ，すなわち，純無限＝III 型である．また，$\mathfrak{N}$ が I 型または II 型ならば半有限である．I 型の $\mathfrak{N}$ を**離散的**といい，0 以外の可換射影を含まない $\mathfrak{N}$ を**連続的**という．なお，固有無限のことを**真無限**と呼ぶときもある.

〈**補題 4.47**〉 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，次が成立する.

（1） 可換な E は有限である.

（2） E が可換で $F\prec E$ ならば，F も可換である.

（3） E が有限で $F\prec E$ ならば，F も有限である.

（4） E が可換で $F\leqq E$ ならば，$F=Ez(F)$.

（5） E,F が可換で $z(E)\leqq z(F)$ (resp. $z(E)=z(F)$) ならば，$E\prec F$ (resp. $E\sim F$).

証明 （1）～（3）は定義より明らかであろう.

（4）: $E\mathfrak{N}E$ が可換であるから，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して $FA(E-F)=F(EAE)(E-F)=F(E-F)(EAE)=0$.　つまり $F\mathfrak{N}(E-F)=\{0\}$ となり，〈補題 4.44〉より $z(F)z(E-F)=0$. よって $z(F)(E-F)=0$ となり，$F=Ez(F)$.

（5）: 比較定理より，$P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $EP\prec FP$, $FP^\perp\prec EP^\perp$. $E_1=EP^\perp$, $F_1=FP^\perp$ とおくと，$z(E_1)\leqq z(F_1)$ で，$F_2\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $F_1\sim F_2\leqq E_1$. E_1 が可換であるから，（4）より $F_2=E_1z(F_2)=E_1z(F_1)\geqq E_1z(E_1)=E_1$. よって $F_1\sim E_1$ となるから，$E\prec F$. 後半の主張は，〈定理 4.41〉より明らか. ▮

〈**補題 4.48**〉 互いに素な可換 (resp. 有限) 射影の族 $\{E_j\,;\,j\in J\}$ に対して，$\sum_{j\in J}E_j$ は可換 (resp. 有限) である.

証明 $E=\sum_{j\in J}E_j, P_j=z(E_j)$ とおくと，$E_j=EP_j$ $(\forall j\in J)$．各E_jが可換のとき，$E\mathfrak{N}E=\bigoplus_{j\in J}E_j\mathfrak{N}E_j$ より，$E\mathfrak{N}E$ は可換である．よって E は可換である．次に，各 E_j が有限のとき，$E\sim F\leqq E$ となる $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$FP_j\sim EP_j=E_j$ かつ $FP_j\leqq E_j$ が成立する．よって $E_j=FP_j\leqq F$ $(\forall j\in J)$ となるから，$E=F$．したがって E は有限である．▌

〈定理 4.49〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に対して，$\sum_{i=1}^{5}P_i=I$ である $P_i\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ $(i=1,\cdots,5)$ が一意に存在して（i）$\mathfrak{N}P_1$ は $\mathrm{I}_{\text{有限}}$ 型；（ii）$\mathfrak{N}P_2$ は I_∞ 型；（iii）$\mathfrak{N}P_3$ は II_1 型；（iv）$\mathfrak{N}P_4$ は II_∞ 型；（v）$\mathfrak{N}P_5$ はIII型となる．

証明 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ を互いに素な可換射影の極大族とする．〈補題 4.48〉より，$E=\sum_{j\in J}E_j$ は可換である．$P_0=z(E)$ とおくと，$P\leqq P_0$ である $P(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して，PE $(\neq 0)$ は可換射影である．よって $\mathfrak{N}P_0$ はI型である．$\{F_k\,;\,k\in K\}$ を $\mathfrak{N}P_0$ の有限な中心射影の極大直交族とすると，〈補題 4.48〉より，$P_1=\sum_{k\in K}F_k$ は有限である．また，極大性より $P_2=P_0-P_1$ は固有無限である．よって $\mathfrak{N}P_1$ は $\mathrm{I}_{\text{有限}}$ 型であり，$\mathfrak{N}P_2$ は I_∞ 型である．次に，$\{E_j'\,;\,j\in J'\}$ を $\mathfrak{N}(I-P_0)$ の互いに素な有限射影の極大族とすると，再び〈補題 4.48〉より，$E'=\sum_{j\in J'}E_j'$ は有限である．$Q=z(E')$ とおくと，$\mathfrak{N}Q$ は0以外の可換射影を含まず，$P\leqq Q$ である $P(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して，$PE'(\neq 0)$ は有限射影である．よって $\mathfrak{N}Q$ はII型である．$P_5=I-P_0-Q$ とおくと，$\mathfrak{N}P_5$ は0以外の有限射影を含まない．よって $\mathfrak{N}P_5$ はIII型である．さらに，$\{F_k'\,;\,k\in K'\}$ を $\mathfrak{N}Q$ の有限な中心射影の極大直交族とし，$P_3=\sum_{k\in K'}F_k'$, $P_4=Q-P_3$ とおくと，$\mathfrak{N}P_3$ は II_1 型であり，$\mathfrak{N}P_4$ は II_∞ 型である．以上より，$\sum_{i=1}^{5}P_i=I$ であり，(i)〜(v) が成立する．最後に，一意性を示すために，$\sum_{i=1}^{5}P_i'=I$ である $P_i'\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ $(i=1,\cdots,5)$ に対して (i)〜(v) が成立したとする．$\mathfrak{N}P_5'(I-P_5)$ は半有限かつ純無限だから，$P_5'(I-P_5)=0$ となり $P_5'\leqq P_5$ を得る．$P_5\leqq P_5'$ も同様だから，$P_5'=P_5$ が成立する．同様に議論して，$P_3'+P_4'=P_3+P_4$, $P_3'=P_3$, $P_1'=P_1$ がわかる．▌

この定理より，$\mathfrak{N}=\bigoplus_{i=1}^{5}\mathfrak{N}P_i$ と書けて，$\mathfrak{N}$ はI, II, III型の v.N. 代数の直和に分解される．したがって，v.N. 代数の研究はI, II, III型の v.N. 代数の研究に帰せられる．なお，$\mathfrak{N}$ が半有限であることは $P_5=0$ と同値である．

〈系 4.50〉 $\mathfrak{N}$ が因子ならば，$\mathfrak{N}$ は $\mathrm{I}_{\text{有限}}$ 型，I_∞ 型，II_1 型，II_∞ 型，III 型のいずれかである．

証明 $\mathcal{P}(\mathfrak{Z})=\{0, I\}$ より明らか．▌

〈定理 4.51〉 $\mathfrak{N}$ が離散的 (resp. 半有限) であることは，可換 (resp. 有限) 射影 $E \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $z(E)=I$ となることと同値である.

証明 $\mathfrak{N}$ が離散的 (半有限) であるとき，互いに素な可換 (有限) 射影の極大族 $\{E_j ; j \in J\}$ をとり，$E=\sum_{j \in J} E_j$ とおく. 〈補題 4.48〉より E は可換 (有限) 射影であり，極大性より $z(E)=I$. 逆はすぐにわかる. ▌

〈系 4.52〉 $\mathfrak{N}$ が離散的 (resp. 半有限) であることは，任意の $F(\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が 0 以外の可換 (resp. 有限) 射影を含むことと同値である.

証明 $\mathfrak{N}$ が離散的 (半有限) であるとき，〈定理 4.51〉より可換 (有限) な $E \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $z(E)=I$. 任意の $F(\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，比較定理より $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $EP \prec FP$ かつ $FP^\perp \prec EP^\perp$. $P \neq 0$ ならば，F は EP $(\neq 0)$ に同値な可換 (有限) 射影を含む. $P=0$ ならば，$F \prec E$ より F は可換 (有限) である. ▌

〈定理 4.53〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に関して，次は同値である.

(1) $\mathfrak{N}$ が固有無限である.

(2) 直交列 $\{E_n ; n \in \boldsymbol{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $E_n \sim I$, $\sum_n E_n = I$.

(3) $E \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $E \sim E^\perp \sim I$.

証明 (1)⇒(2)：$E_n \sim P$, $\sum_n E_n = P$ となる直交列 $\{E_n\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在するような中心射影 P を考える. このような中心射影の極大直交族を $\{P_k ; k \in K\}$ とする. このとき，各 P_k に対して，直交列 $\{E_{kn} ; n \in \boldsymbol{N}\}$ がとれて $E_{kn} \sim P_k$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$, $\sum_n E_{kn} = P_k$. いま $E_n = \sum_{k \in K} E_{kn}$ とおくと，$E_n \sim \sum_{k \in K} P_k$, $\sum_n E_n = \sum_{k \in K} P_k$. したがって $\sum_{k \in K} P_k = I$ を証明すればよい. $Q = I - \sum_{k \in K} P_k \neq 0$ とすると，(1) より半等距離作用素 $W \in \mathfrak{N}$ が存在して $W^* W = Q$, $WW^* \lneqq Q$. $F_1 = Q - WW^*$, $F_{n+1} = WF_n W^*$ $(n \in \boldsymbol{N})$ とおくと，$F_{n+1} \sim F_n$ で $\{F_n\}$ は直交する. $\{F_n\}$ を含み互いに同値で直交する射影の極大族 $\{F_j ; j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ をとる. $F_0 = I - \sum_{j \in J} F_j$ とおくと，比較定理より $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $F_0 P \prec F_j P$, $F_j P^\perp \prec F_0 P^\perp$ $(\forall j \in J)$. $P=0$ とすると，$F_j \prec F_0$ となり $\{F_j\}$ の極大性に反するから，$P \neq 0$. $j_0 \in J$ をとって，

$$P = F_0 P + \sum_{j \in J} F_j P \prec F_{j_0} P + \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} F_j P = \sum_{j \in J} F_j P \leqq P$$

が成立するから，$P \sim \sum_{j \in J} F_j P$. よって，直交族 $\{G_j ; j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $G_j \sim F_j P$ $(\forall j \in J)$, $P = \sum_{j \in J} G_j$. J を濃度の等しい可算個の J_n $(n \in \boldsymbol{N})$ に分割して $E_n' = \sum_{j \in J_n} G_j$ とおくと，$E_n' \sim P$, $\sum_n E_n' = P$ が成立する. さらに，$z(G_j) \leqq z(F_j) \leqq Q$ より，$P = z(E_n') \leqq Q$. これは $\{P_k ; k \in K\}$ の極大性に反する. したがって $Q=0$ であり，(2) が示せた.

(2)⇒(3)：$E = \sum_n E_{2n}$ とおけばよい.

(3)⇒(1)：$E\sim E^{\perp}\sim I$ のとき，任意の $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ に対して $EP\sim(P-EP)\sim P$. ここで，P を有限とすると，$EP=P-EP=P$ となり $P=0$. したがって $\mathfrak{N}$ は固有無限である.▌

〈定理 4.54〉 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が有限ならば，$E\vee F$ も有限である.

証明 $E\vee F=I$ と仮定してよい．I が有限でないとすると，〈定理 4.49〉より固有無限な $P(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在する．E,F の代わりに EP, FP を考えれば，$P=I$ としてよい．このとき〈定理 4.53〉より，$G\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $G\sim G^{\perp}\sim I$. ところで，〈補題 4.43〉より $E^{\perp}=E\vee F-E\sim F-E\wedge F\leqq F$ となるから，$E^{\perp}$ は有限である．$G\wedge E^{\perp}$ と $G^{\perp}\wedge E$ に比較定理を用いると，$Q\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $(G\wedge E^{\perp})Q\prec(G^{\perp}\wedge E)Q$, $(G^{\perp}\wedge E)Q^{\perp}\prec(G\wedge E^{\perp})Q^{\perp}$. 最初の式から，

$$GQ=(G\wedge E^{\perp})Q+(G-G\wedge E^{\perp})Q$$
$$\prec(G^{\perp}\wedge E)Q+(G\vee E^{\perp}-E^{\perp})Q\leqq EQ.$$

2番目の式から，同様にして $G^{\perp}Q^{\perp}\prec E^{\perp}Q^{\perp}$. $G, G^{\perp}$ が固有無限であり，$E, E^{\perp}$ が有限であるから，$GQ=G^{\perp}Q^{\perp}=0$. $\mathrm{z}(G)=\mathrm{z}(G^{\perp})=I$ より，$Q=Q^{\perp}=0$ となり矛盾である．▌

〈補題 4.55〉 互いに同値な射影の直交族 $\{E_j\,;\,j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $\sum_{j\in J}E_j=I$ ならば，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}_{E_1}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ (*同型)．ただし，E_1 はある E_j であり，$\mathcal{K}$ は J の濃度と等しい次元の Hilbert 空間である.

証明 各 $j\in J$ に対して，半等距離作用素 $V_j\in\mathfrak{N}$ が存在して $V_j^*V_j=E_1$, $V_jV_j^*=E_j$. $\mathcal{K}$ の CONS$\{y_j\,;\,j\in J\}$ をとり，$\sum_j x_j\otimes y_j\in E_1\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ に対して $U(\sum_j x_j\otimes y_j)=\sum_j V_jx_j$ と定めると，

$$\langle U(\sum_i x_i\otimes y_i),\ U(\sum_j u_j\otimes y_j)\rangle=\langle\sum_i V_ix_i,\ \sum_j V_ju_j\rangle$$
$$=\sum_{i,j}\langle x_i,\ V_i^*V_ju_j\rangle=\sum_j\langle x_j,\ u_j\rangle=\langle\sum_i x_i\otimes y_i,\ \sum_j u_j\otimes y_j\rangle.$$

$\sum_{j\in J}E_j=I$ より，U は $E_1\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ から $\mathcal{H}$ の上へのユニタリー作用素である．また，$U^*x=\sum_j V_j^*x\otimes y_j\ (\forall x\in\mathcal{H})$. $A\in\mathfrak{N}$ ならば，$(U^*AU)(\sum_j x_j\otimes y_j)=U^*\sum_j AV_jx_j=\sum_{i,j}V_i^*AV_jx_j\otimes y_i$ より，$U^*AU=(V_i^*AV_j)$. $V_i^*AV_j\in\mathfrak{N}_{E_1}$ $(\forall i,j\in J)$ であるから，〈定理 4.29〉の(2)より，$U^*AU\in\mathfrak{N}_{E_1}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$. 逆に，$B=(B_{ij})\in\mathfrak{N}_{E_1}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ ならば，$(UBU^*)x=UB(\sum_j V_j^*x\otimes y_j)=U(\sum_{i,j}B_{ij}V_j^*x\otimes y_i)=\sum_{i,j}V_iB_{ij}V_j^*x$ であり，$B_{ij}\in\mathfrak{N}_{E_1}$ $(\forall i,j\in J)$ であるから，$UBU^*\in\mathfrak{N}$. よって $U^*\mathfrak{N}U=\mathfrak{N}_{E_1}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ が成立する．▌

〈定理 4.56〉 $\mathfrak{N}$ が固有無限であり，$\mathcal{K}$ が可分 Hilbert 空間であるとき，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$.

証明 $\mathcal{K}$ が可算次元とする．〈定理 4.53〉より，直交列 $\{E_n\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $E_n\sim$

I, $\sum_n E_n = I$. 〈補題 4.55〉より $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}_{E_1} \otimes \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$. $E_1 \sim I$ より $\mathfrak{N}_{E_1} \simeq \mathfrak{N}$. よって $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N} \otimes \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$. $\mathcal{K}$ が有限次元でも同様に示せる. ▌

[定義 4.9] v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ が**斉次的**であるとは, 互いに同値な可換射影の直交族 $\{E_k ; k \in K\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $\sum_{k \in K} E_k = I$ である場合をいう. ここで, K の濃度が γ のとき, $\mathfrak{N}$ を **γ-斉次的**または **I_γ 型**という (斉次的な $\mathfrak{N}$ は明らかに I 型である).

〈補題 4.57〉 $\mathfrak{N}$ が I 型のとき, 任意の $E \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, 可換な $F \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $F \leqq E$, $\mathrm{z}(F) = \mathrm{z}(E)$.

証明 〈定理 4.51〉より, 可換な $G \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $\mathrm{z}(G) = I$. 任意の $E (\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して, $\mathrm{z}(E)\mathrm{z}(G) = \mathrm{z}(E) \neq 0$ であるから,〈補題 4.44〉より, $0 \neq E_1 \leqq E$, $0 \neq G_1 \leqq G$ かつ $E_1 \sim G_1$ である $E_1, G_1 \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在する. このとき, G が可換であるから E_1 も可換である. したがって, 0 でない任意の射影が 0 でない可換射影を含むことがわかった. さて, $\{E_j ; j \in J\}$ を $E_j \leqq E$ で互いに素な可換射影の極大族とすると, 〈補題 4.48〉より $F = \sum_{j \in J} E_j$ は可換である. いま $\mathrm{z}(F) \lneqq \mathrm{z}(E)$ とすると, $E(\mathrm{z}(E) - \mathrm{z}(F))$ $(\neq 0)$ は 0 でない可換射影 E_0 を含む. $E_0 \leqq E$ で $\mathrm{z}(E_0)\mathrm{z}(F) = 0$ であるから, $\{E_j\}$ の極大性に反する. よって $\mathrm{z}(F) = \mathrm{z}(E)$. ▌

〈定理 4.58〉 I 型 v.N. 代数の構造定理: (1) $\mathfrak{N}$ が I 型ならば, 互いに素な $\{P_j ; j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $\sum_{j \in J} P_j = I$, かつ, 任意の $j \in J$ に対して $\mathfrak{N}P_j$ は斉次的である.

(2) $\mathfrak{N}$ が γ-斉次的ならば, 可換 v.N. 代数 $\mathfrak{A}$ と γ 次元の Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ が存在して $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{A} \otimes \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$.

証明 (1): $\{P_j ; j \in J\}$ を各 $\mathfrak{N}P_j$ が斉次的である $\mathfrak{N}$ の中心射影の極大直交族とする. $\sum_{j \in J} P_j = I$ を示すために $Q = I - \sum_{j \in J} P_j \neq 0$ とすると, $\mathfrak{N}Q$ が I 型であるから, 〈定理 4.51〉より可換な $E \in \mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $\mathrm{z}(E) = Q$. いま, E と同値な可換射影の極大直交族 $\{E_k ; k \in K\}$ をとり, $G = \sum_{k \in K} E_k$ とおくと, $G \leqq Q$ が成立する. $\mathrm{z}(Q - G) = Q$ とすると, 〈補題 4.57〉より可換な $F \leqq Q - G$ が存在して $\mathrm{z}(F) = Q$. 〈補題 4.47〉の (5) より $F \sim E$ となるから, $\{E_k\}$ の極大性に反する. よって $\mathrm{z}(Q - G) \lneqq Q$. そこで $P = Q - \mathrm{z}(Q - G)$ とおくと, $(Q - G)P = 0$ より $P = GP = \sum_{k \in K} E_k P$. さらに, $\{E_k P ; k \in K\}$ は互いに同値な可換射影の直交族である. よって $\mathfrak{N}P$ は斉次的となり, これは $\{P_j\}$ の極大性に矛盾する. したがって $\sum_{j \in J} P_j = I$.

(2)：$\{E_k\,;\,k\in K\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が互いに同値な可換射影の直交族で $\sum_{k\in K}E_k=I$ とする．K の濃度を γ とすれば，〈補題 4.55〉より，γ 次元の Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ が存在して $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}_{E_1}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$．ここで，$E_1$ はある E_k であるから，$\mathfrak{A}=\mathfrak{N}_{E_1}$ は可換 v.N. 代数である．▌

この定理より，次の系は明らか．

〈**系 4.59**〉 $\mathfrak{N}$ がI型因子ならば，$\mathfrak{N}\simeq\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$．

$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上のトレース tr と同様に，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上でも（可能ならば）トレースを考えることは有用である．

［**定義 4.10**］ v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上の**トレース** τ とは，次の性質をもつ写像 $\tau:\mathfrak{N}_+\to[0,\infty]$ である．ただし，$0\infty=0$ と約束する．

(1) $\tau(A+B)=\tau(A)+\tau(B)$，$\forall A,B\in\mathfrak{N}_+$．

(2) $\tau(\lambda A)=\lambda\tau(A)$，$\forall A\in\mathfrak{N}_+$，$\forall\lambda\in[0,\infty)$．

(3) $\tau(A^*A)=\tau(AA^*)$，$\forall A\in\mathfrak{N}$．

さらに，トレースに関しては，次の諸概念が重要である．

［**定義 4.11**］ τ を $\mathfrak{N}$ 上のトレースとする．

(1) τ が**忠実** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A\in\mathfrak{N}_+$，$\tau(A)=0$ ならば $A=0$．

(2) τ が**正規** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の有界な増大ネット $\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{N}_+$ に対して $\tau(\sup_\alpha A_\alpha)=\sup_\alpha\tau(A_\alpha)$．

(3) τ が**有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau(I)<\infty$．

(4) τ が**半有限** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ に対して，$B(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ が存在して $B\leqq A$ かつ $\tau(B)<\infty$．

(5) トレースの族 $\{\tau_k\,;\,k\in K\}$ が**十分** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ に対して，ある $k\in K$ が存在して $\tau_k(A)\neq 0$．

容易にわかるように，$\mathfrak{N}$ 上の有限正規トレース τ は，$\tau\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に一意に拡張されて $\tau(AB)=\tau(BA)$（$\forall A,B\in\mathfrak{N}$）を満たす．

τが$\mathfrak{N}$上の半有限正規トレースであるとき，$E_0=\vee\{E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})\,;\,\tau(E)=0\}$とおくと，〈補題 4.16〉と同様に，$E_0$は$\tau(E_0)=0$を満たす最大の$E_0\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$である．任意の$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$に対して，$\tau(UE_0U^*)=\tau((UE_0)(UE_0)^*)=\tau((UE_0)^*(UE_0))=\tau(E_0)=0$．よって$UE_0U^*\leqq E_0$ $(\forall U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}))$となり，$E_0\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$．このとき，$s(\tau)=E_0{}^\perp$を$\tau$の**台**という．スペクトル分解定理を使うと，$\tau$が$\mathfrak{N}s(\tau)$上で忠実であることがわかる．

以下，$\mathfrak{N}$の有限性と有限正規トレースの十分族の存在とが同値であり，$\mathfrak{N}$の半有限性と忠実な半有限正規トレースの存在とが同値であることを証明しよう．

〈補題 4.60〉 $E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$が有限で$E\sim F$ならば，$E^\perp\sim F^\perp$．

証明 〈定理 4.54〉より，$E\vee F$は有限である．$E\vee F-E\sim E\vee F-F$を示せばよいから，$E\vee F=I$つまり$\mathfrak{N}$が有限としてよい．比較定理より，$P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$が存在して$E^\perp P\prec F^\perp P$，$F^\perp P^\perp\prec E^\perp P^\perp$．$E^\perp P\sim E_1\leqq F^\perp P$，$F^\perp P^\perp\sim F_1\leqq E^\perp P^\perp$となる$E_1,F_1\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$をとると，$P=EP+E^\perp P\sim FP+E_1\leqq P$および$P^\perp=FP^\perp+F^\perp P^\perp\sim EP^\perp+F_1\leqq P^\perp$が成立する．$P$，$P^\perp$が有限であるから，$E_1=F^\perp P$，$F_1=E^\perp P^\perp$．よって$E^\perp\sim F^\perp$．▌

〈補題 4.61〉 $\{E_n\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$を有限射影の単調増大列とするとき，$F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$E_n\prec F$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$ならば，$\bigvee_{n=1}^{\infty}E_n\prec F$．

証明 $F_1=E_1$，$F_n=E_n-E_{n-1}$ $(n=2,3,,\cdots)$とおく．$F_n\sim G_n\leqq F$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$となる直交列$\{G_n\}$が存在すれば，〈補題 4.40〉より$\bigvee_{n=1}^{\infty}E_n=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}G_n\leqq F$が成立する．$\{G_n\}$の存在を帰納法により示す．$F_1\prec F$より$G_1$がとれる．$G_1,\cdots,G_n$がとれたとすると，$E_n=\sum_{i=1}^{n}F_i\sim\sum_{i=1}^{n}G_i\leqq F$．$E_{n+1}\sim E_{n+1}'\leqq F$となる$E_{n+1}'\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$をとると，$E_n\leqq E_{n+1}$より$\sum_{i=1}^{n}G_i\prec E_{n+1}'$．よって$E_n'\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$が存在して，$\sum_{i=1}^{n}G_i\sim E_n'\leqq E_{n+1}'$．さらに，$W^*W=E_{n+1}$，$WW^*=E_{n+1}'$である半等距離作用素$W\in\mathfrak{N}$が存在して，$E_{n+1}=W^*E_{n+1}'W\geqq W^*E_n'W\sim E_n'\sim E_n$．$E_n$が有限であるから，〈補題 4.60〉より$E_{n+1}-E_n\sim E_{n+1}-W^*E_n'W=W^*(E_{n+1}'-E_n')W\sim E_{n+1}'-E_n'$．再び〈補題 4.60〉より，$F-\sum_{i=1}^{n}G_i\sim F-E_n'\geqq E_{n+1}'-E_n'$．よって$G_{n+1}\leqq F-\sum_{i=1}^{n}G_i$が存在して，$G_{n+1}\sim E_{n+1}'-E_n'\sim E_{n+1}-E_n=F_{n+1}$．▌

〈補題 4.62〉 $\mathfrak{N}$が有限であり，$\{E_n\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$が直交列とするとき，列$\{F_n\}$

$\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が $F_n\sim E_n$ ($\forall n\in\boldsymbol{N}$) を満たすならば，$F_n\xrightarrow{us}0$.

証明 $F\prec E, F'\prec E', E\perp E'$ のとき，$F\vee F'-F'\sim F-F\wedge F'\prec E$ であるから，$F\vee F'=(F\vee F'-F')+F'\prec E+E'$. このことから帰納法により，$n\leqq m$ のとき $\bigvee_{i=n}^{m}F_i\prec\sum_{i=n}^{m}E_i$ がわかる．〈補題 4.61〉より $G_n=\bigvee_{i=n}^{\infty}F_i\prec\sum_{i=n}^{\infty}E_i$. $E_0=\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\right)^{\perp}$ とおくと，〈補題 4.60〉より $\sum_{i=0}^{n-1}E_i=\left(\sum_{i=n}^{\infty}E_i\right)^{\perp}\prec G_n{}^{\perp}$. $G=\bigwedge_{n=1}^{\infty}G_n$ とおくと，〈補題 4.61〉より $I=\sum_{i=0}^{\infty}E_i\prec G^{\perp}$. $\mathfrak{N}$ が有限であるから，$G=0$ となる．よって $G_n\xrightarrow{us}0$ で，$F_n\leqq G_n$ より $F_n\xrightarrow{us}0$. ▌

いま，$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ に対して，等距離線形写像 $T_U:\mathfrak{N}_*\to\mathfrak{N}_*$ を $T_U\varphi(A)=\varphi(UAU^*)$ ($\varphi\in\mathfrak{N}_*, A\in\mathfrak{N}$) で定める．各 $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\mathcal{F}_\varphi\subset\mathfrak{N}_*$ を $\mathcal{F}_\varphi=\overline{\mathrm{co}}\{T_U\varphi\,;\,U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})\}$（ノルム閉凸包）とすると，

〈補題 4.63〉 $\mathfrak{N}$ が有限のとき，任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\mathcal{F}_\varphi$ は弱コンパクトである．

証明 $\mathcal{F}_\varphi$ が有界かつ弱閉であるから，〈定理 4.15〉より，任意の直交列 $\{E_n\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$\psi\in\mathcal{F}_\varphi$ について一様に $\psi(E_n)\to0$ を示せばよい．このためには，$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ について一様に $\varphi(UE_nU^*)\to0$ をいえば十分である．この結論を否定すると，ある $\varepsilon>0$ と部分列 $\{E_{n(k)}\}$ および $\{U_k\}\subset\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して $|\varphi(U_kE_{n(k)}U_k{}^*)|\geqq\varepsilon$ ($\forall k\in\boldsymbol{N}$). 〈補題 4.62〉より $U_kE_{n(k)}U_k{}^*\xrightarrow{us}0$ となり，$\varphi(U_kE_{n(k)}U_k{}^*)\to0$. これは矛盾である．▌

〈定理 4.64〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ が有限であることは，$\mathfrak{N}$ が有限正規トレースの十分な族をもつことと同値である．

証明 $\mathfrak{N}$ が有限であるとする．任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，〈補題 4.63〉より $\mathcal{F}_\varphi$ は弱コンパクトな凸集合である．また，任意の $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ に対して，T_U は $\mathcal{F}_\varphi$ 上の等距離アフィン写像で弱位相に関して連続である．よって Ryll-Nardewski の不動点定理より，$\{T_U\,;\,U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})\}$ に関して不変な $\tau_\varphi\in\mathcal{F}_\varphi$ が存在する．このとき，$\tau_\varphi(UAU^*)=\tau_\varphi(A)$ ($\forall U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}), \forall A\in\mathfrak{N}$) より，$\tau_\varphi$ は $\mathfrak{N}$ 上の有限正規トレースとなる．ところで，$\mathrm{s}(\tau_\varphi)\in\mathfrak{Z}$ かつ $\tau_\varphi(A)=\varphi(A)$ ($\forall A\in\mathfrak{Z}$) から，$\mathrm{s}(\tau_\varphi)=\mathrm{s}(\varphi|\mathfrak{Z})$ がわかる．したがって $\vee\{\mathrm{s}(\tau_\varphi)\,;\,\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}\}=I$ が成立する．これで，$\{\tau_\varphi\,;\,\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}\}$ が有限正規トレースの十分族であることが示せた．

逆に，$\{\tau_k\,;\,k\in K\}$ を有限正規トレースの十分族とする．$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$, $E\sim I$ のとき，半等距離作用素 $W\in\mathfrak{N}$ が存在して $W^*W=E$, $WW^*=I$. $\tau_k(WW^*)=\tau_k(W^*W)$ より $\tau_k(I-E)=0$ ($\forall k\in K$). よって $E=I$. したがって $\mathfrak{N}$ は有限である．▌

次の定理は，有限 v.N. 代数の位相的特徴づけを与える．

〈定理 4.65〉 v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ が有限であることは，対合 $*: A \mapsto A^*$ が $\mathfrak{R}_1$ 上で τ^s-連続であることと同値である．

証明 $\mathfrak{R}$ が有限とすると，〈定理 4.64〉より $\mathfrak{R}$ は有限正規トレースの十分族 $\{\tau_k ; k \in K\}$ をもつ．このとき，任意の $A \in \mathfrak{R}$ に対して，$\tau_k(BA)=0$ $(\forall k \in K, \forall B \in \mathfrak{R})$ ならば $A=0$ となる．したがって，$(\mathfrak{R}_*)^* = \mathfrak{R}$ より，$\{\tau_k(B\cdot) ; k \in K, B \in \mathfrak{R}\}$ の張る線形空間は $\mathfrak{R}_*$ でノルム稠密である．ネット $\{A_\alpha\} \subset \mathfrak{R}_1$ が $A_\alpha \xrightarrow{s} A$ のとき，任意の $k \in K, B \in \mathfrak{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} |\tau_k(B(A_\alpha - A)(A_\alpha - A)^*)| &= |\tau_k((A_\alpha - A)^* B (A_\alpha - A))| \\ &\leqq \tau_k((A_\alpha - A)^* B B^* (A_\alpha - A))^{1/2} \tau_k((A_\alpha - A)^*(A_\alpha - A))^{1/2} \\ &\leqq \|B\| \tau_k((A_\alpha - A)^*(A_\alpha - A)) \to 0. \end{aligned}$$

よって $(A_\alpha - A)(A_\alpha - A)^* \to 0$ (弱＊収束)．$\mathfrak{R}$ の弱＊位相は τ^{uw} 位相と一致するから，$A_\alpha{}^* \xrightarrow{s} A^*$ を得る．

逆に，$\mathfrak{R}$ が有限でないとすると，〈定理 4.53〉より $E(\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ と直交列 $\{E_n\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ が存在して $E_n \sim E$ $(\forall n \in \boldsymbol{N})$．よって半等距離作用素の列 $\{W_n\} \subset \mathfrak{R}$ が存在して $W_n{}^* W_n = E_n$，$W_n W_n{}^* = E$．このとき，$W_n \xrightarrow{s} 0$，しかし $W_n{}^* \xrightarrow{s} 0$ とはならない．よって対合＊は $\mathfrak{R}_1$ 上で τ^s-連続でない．▮

〈補題 4.66〉 $\mathfrak{R}$ が固有無限かつ半有限であるならば，互いに同値な有限射影の直交族 $\{E_j ; j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ と $P(\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $P = \sum_{j \in J} E_j$．

証明 有限な $F(\neq 0) \in \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ をとり，$\{F_j ; j \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathfrak{R})$ を F と同値な射影の極大直交族とする．$F_0 = I - \sum_{j \in J} F_j$ とおくと，比較定理より $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $F_0 P \prec FP$，$FP^\perp \prec F_0 P^\perp$．$P=0$ とすると，$F \prec F_0$ となり $\{F_j\}$ の極大性に反する．よって $P \neq 0$．J が有限集合とすると，〈定理 4.54〉より $P = F_0 P + \sum_{j \in J} F_j P$ は有限となり，$\mathfrak{R}$ が固有無限であることに矛盾する．したがって J は無限集合となる．このとき，〈定理 4.53〉の証明 (1)⇒(2) と同様にして $P \sim \sum_{j \in J} F_j P$ が示せる．よって $E_j \sim F_j P$ で $P = \sum_{j \in J} E_j$ となる直交族 $\{E_j ; j \in J\}$ がとれる．▮

〈定理 4.67〉 v.N. 代数 $\mathfrak{R}$ が半有限であることは，$\mathfrak{R}$ が忠実な半有限正規トレースをもつことと同値である．

証明 $\mathfrak{R}$ は半有限であるとして，$\{\tau_k ; k \in K\}$ を $\{\mathrm{s}(\tau_k) ; k \in K\}$ が直交する半有限正規トレースの極大族とする．$\tau(A) = \sum_{k \in K} \tau_k(A)$ $(A \in \mathfrak{R}_+)$ と定めると，τ が $\mathfrak{R}$ 上の半有限正規トレースであることは容易にわかる．$\mathrm{s}(\tau) = I$ を示すために，$Q = \mathrm{s}(\tau)^\perp \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ とおいて $Q \neq 0$ とする．$0 \neq P \leqq Q$ となる有限な $P \in \mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在すれば，〈定理 4.64〉よ

り $\mathfrak{N}P$ 上の有限正規トレース $\mu(\neq 0)$ がとれる．$\tau_0(A)=\mu(AP)$ $(A\in\mathfrak{N})$ と定めると，τ_0 は $\mathfrak{N}$ 上の有限正規トレースであり，$0\neq s(\tau_0)\leqq P$．次に，Q が 0 以外の有限な中心射影を含まなければ，$\mathfrak{N}Q$ は固有無限かつ半有限である．〈補題 4.66〉より，同値な有限射影の直交族 $\{E_j\,;\,j\in J\}$ と $P(0\neq P\leqq Q)\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して $P=\sum_{j\in J}E_j$．E_1 をある E_j とすると，半等距離作用素の族 $\{W_j\,;\,j\in J\}$ が存在して $W_j{}^*W_j=E_j$，$W_jW_j{}^*=E_1$．〈定理 4.64〉より，$\mathfrak{N}_{E_1}$ 上の有限正規トレース μ $(\neq 0)$ がとれる．$\tau_0(A)=\sum_{j\in J}\mu(W_jAW_j{}^*)$ $(A\in\mathfrak{N}_+)$ と定めると，

$$\tau_0(A^*A)=\sum_j\mu(W_jA^*AW_j{}^*)=\sum_j\mu(\sum_i(W_iAW_j{}^*)^*(W_iAW_j{}^*))$$
$$=\sum_{i,j}\mu((W_iAW_j{}^*)(W_iAW_j{}^*)^*)=\sum_i\mu(W_iAA^*W_i)=\tau_0(AA^*).$$

よって τ_0 は $\mathfrak{N}$ 上のトレースである．τ_0 が正規であることも容易にわかる．任意の $A(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ に対して，$\tau_0(AP^\perp)=0$．$AP^\perp=0$ のときは，$A^{1/2}PA^{1/2}=AP\neq 0$ より，ある $j\in J$ で $A^{1/2}E_jA^{1/2}\neq 0$．$A^{1/2}E_jA^{1/2}\leqq A$ かつ $\tau_0(A^{1/2}E_jA^{1/2})=\tau_0(E_jAE_j)\leqq\|A\|$ $\tau_0(E_j)=\|A\|\mu(E_1)<\infty$．したがって τ_0 は半有限正規トレースであり，$0\neq s(\tau_0)\leqq P$．これは $\{\tau_k\}$ の極大性に反する．ゆえに $s(\tau)=I$ となり，τ は忠実である．

逆に，τ を $\mathfrak{N}$ 上の忠実な半有限正規トレースとする．任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して，$B(\neq 0)\in\mathfrak{N}_+$ が存在して $B\leqq E$ かつ $\tau(B)<\infty$．B のスペクトル分解を用いると，ある $\lambda>0$ で $F\leqq\lambda B$ となる $F(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在する．このとき $F\leqq E$ であり，$\tau(F)\leqq\lambda\tau(B)<\infty$ より F は有限である．よって $\mathfrak{N}$ は半有限である．▌

最後に，v.N. 代数の可換子代数とテンソル積の型に関する結果を述べておこう．

〈定理 4.68〉 $\mathfrak{N}$ が半有限 (resp. I 型，II 型，III 型) であることは，それぞれ $\mathfrak{N}'$ が半有限 (resp. I 型，II 型，III 型) であることと同値である．

次の定理は，〈定理 4.51〉と〈定理 4.68〉より示される．

〈定理 4.69〉 $\mathfrak{N}$ が離散的 (resp. 半有限) であることは，可換 (resp. 有限) な $\mathfrak{M}'$ をもつ v.N. 代数 $\mathfrak{M}$ で $\mathfrak{N}$ に $*$ 同型なものが存在することと同値である．

〈定理 4.70〉 2つの v.N. 代数 $\mathfrak{N},\mathfrak{M}$ のテンソル積 $\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ の型は，下表のように $\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{M}$ の型より定まる．

$\mathfrak{N}$	I 型	有限	半有限	連続的	固有無限	Ⅲ型
$\mathfrak{M}$	I 型	有限	半有限	任 意	任 意	任意
$\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$	I 型	有限	半有限	連続的	固有無限	Ⅲ型

なお，Ⅱ型，Ⅲ型 v.N. 代数の例については，本書の最後にある付録で議論される．

第5章　KMS条件と Tomita-Takesaki 理論

この章では，まず，温度 Green 函数の境界条件として Kubo, Martin および Schwinger によって導かれた，いわゆる KMS 条件の Haag–Hugenholtz–Winnink などによる数学的定式化を論じる．5.2 節で，モジュラー作用素を基礎として v.N. 代数とその可換子代数との関連を明らかにした Tomita の画期的な仕事をベースにして，上述の KMS 条件と結びついて発展した Tomita-Takesaki 理論を Rieffel–van Daele の方法に従って説明する．最後に 5.3 節で，v.N. 代数の局所コンパクト群の作用による接合積を定義し，Takesaki の双対定理を証明する．接合積の手法を最初に使ったのは von Neumann であるが，Nakamura–Takeda は 1950 年代後半にこれを作用素代数上で本格的に論じた．その後，作用素代数の位相群による接合積の一般理論が発展した．

5.1　KMS 条 件

3つ組 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(\boldsymbol{R}))$ で記述される C* 力学系を考える．ここで，$\alpha(\boldsymbol{R})=\{\alpha_t\,;\, t\in\boldsymbol{R}\}$ は C* 代数 $\mathcal{A}(\ni I)$ 上の強連続な **1 径数自己同型群** (i.e., α は $\boldsymbol{R}$ の $\mathcal{A}$ 上の強連続な作用) である．

［**定義 5.1**］　状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ がある定数 $\beta(\neq 0)\in\boldsymbol{R}$ で α_t に関して **KMS 条件**を満たすとは，任意の $A, B\in\mathcal{A}$ に対して，領域 $D_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\, -\beta<\mathrm{Im}\,z<0\}$ ($\beta<0$ ならば $D_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\, 0<\mathrm{Im}\,z<-\beta\}$) で解析的かつ $\bar{D}_\beta\equiv\{z\in\boldsymbol{C}\,;\, -\beta\leqq\mathrm{Im}\,z\leqq 0\}$ で有界連続な複素函数 $F_{A,B}(z)$ が存在して，境界条件：

$$F_{A,B}(t)=\varphi(\alpha_t(A)B),\quad F_{A,B}(t-i\beta)=\varphi(B\alpha_t(A)),\qquad \forall\, t\in\boldsymbol{R}$$

を満たす場合をいう．このように KMS 条件は β, α_t に依存しているので，この条件を満たす φ を (β, α_t)-**KMS 状態**と呼ぶこともある．(β, α_t)-KMS 状態の全体を $K_\beta(\alpha)$ で表す．

定義より，『φ が (β, α_t)-KMS 状態 $\Longleftrightarrow$ φ が $(-1, \alpha_{-\beta t})$-KMS 状態』は容

易にわかる．上の定義を $\beta=0$ で解釈すれば，$(0,\alpha_t)$-KMS 状態 φ はトレース状態であるとみなせるが，以下では，常に $\beta\neq 0$ を仮定しておく．

ここで，上記の一見抽象的な条件が，統計物理学における平衡状態の一般化になっていることを見ておくことにしよう．いま，$\mathcal{A}$ として $\boldsymbol{C}(\mathcal{H})+\boldsymbol{C}I$ をとり，H を物理系の Hamiltonian とする．$\beta=1/kT$（k は Boltzmann 定数，T は絶対温度），$\rho=e^{-\beta H}/\mathrm{tr}(e^{-\beta H})$（ただし $e^{-\beta H/2}\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ とする）とおくと，$\rho\in\boldsymbol{T}(\mathcal{H})_+$ で $\mathrm{tr}(\rho)=1$ であるから，$\varphi(A)=\mathrm{tr}(\rho A)$（$A\in\mathcal{A}$）で定められる φ は $\mathcal{A}$ 上の状態になる．ところで，H は系の力学的変化を司るユニタリー群 $U_t=e^{itH}$（$t\in\boldsymbol{R}$）を生成し，これによって観測量 A の時間発展が $\alpha_t(A)=U_tAU_t{}^*$ で定められる．このとき，上で定めた状態 φ は KMS 条件を満たすことがわかる．実際，$F_{A,B}(z)=\mathrm{tr}(e^{-\beta H}e^{izH}Ae^{-izH}B)/\mathrm{tr}(e^{-\beta H})$ とおくと，これは D_β で解析的かつ $\bar{D}_\beta$ で有界連続であり，上記の境界条件を満たしている．しかもこの場合は，φ がただ１つの (β,α_t)-KMS 状態であることもわかる．通常，この φ は Gibbs 状態と呼ばれている．

さて，話を一般論に戻そう．KMS 条件を力学系の平衡状態の記述に採用できることの大きな理由の１つは次の事実である．

〈定理 5.1〉　$\varphi\in K_\beta(\alpha)$ は α_t-不変である．すなわち，$\varphi(\alpha_t(A))=\varphi(A)$（$\forall A\in\mathcal{A}$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$）．

証明　φ が KMS 条件を満たすから，任意の $A\in\mathcal{A}_{sa}$ に対して，$F_{A,I}(t)=\varphi(\alpha_t(A))$ は実数で $F_{A,I}(t)=F_{A,I}(t-i\beta)$（$\forall t\in\boldsymbol{R}$）となるから，Schwartz の鏡像原理より $F_{A,I}(z)$ は周期 $i\beta$ をもつ整関数に拡張される．ゆえに，$F_{A,I}(z)$ の $\bar{D}_\beta$ における有界性より，$F_{A,I}(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で有界になる．したがって，Liouville の定理より $F_{A,I}(z)$ は定数となるから，$\varphi(\alpha_t(A))=\varphi(A)$（$\forall t\in\boldsymbol{R}$）．▌

さて，$A\in\mathcal{A}$ が **α-解析的**であるとは，$\mathcal{A}$ に値をとる整関数 $A(z)$（通常 $\alpha_z(A)$ で表す）が存在して $A(t)=\alpha_t(A)$（$\forall t\in\boldsymbol{R}$）となる場合をいう．この α-解析的な $A\in\mathcal{A}$ の全体を $\mathcal{A}_\alpha$ で表すと，

〈補題 5.2〉　$\mathcal{A}_\alpha$ は $\mathcal{A}$ のノルム稠密で α_t-不変な＊部分代数である．

証明　$A,B\in\mathcal{A}_\alpha$ のとき，$\alpha_z(AB)=\alpha_z(A)\alpha_z(B)$，$\alpha_z(A^*)=\alpha_{\bar{z}}(A)^*$，$\alpha_z(\alpha_t(A))=\alpha_t(\alpha_z(A))$ により，$AB, A^*, \alpha_t(A)\in\mathcal{A}_\alpha$．よって $\mathcal{A}_\alpha$ は α-不変な＊部分代数である．

任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，$A_n=(n/\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nt^2}\alpha_t(A)dt$ とおくと，$\|A_n-A\|\to 0(n\to\infty)$ がすぐにわかる．$A_n(z)=(n/\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n(t-z)^2}\alpha_t(A)dt$ $(z\in\boldsymbol{C})$ と定めると，$A_n(z)$ は整函数であり，$A_n(s)=\alpha_s(A_n)$ $(\forall s\in\boldsymbol{R})$ を満たすから，$A_n\in\mathcal{A}_\alpha$ となる．したがって $\mathcal{A}_\alpha$ は $\mathcal{A}$ でノルム稠密である．▌

註 $\mathcal{A}$ が v. N. 代数で α_t が τ^w-連続 (i. e., 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して $t\longmapsto\alpha_t(A)$ が τ^w-連続) な場合には，$\mathcal{A}_\alpha$ は τ^w-稠密な $*$ 部分代数になる．

〈定理 5.3〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，次は同値である．

(1) $\varphi\in K_\beta(\alpha)$.

(2) $\varphi(AB)=\varphi(B\alpha_{i\beta}(A))$, $\forall A\in\mathcal{A}_\alpha$, $\forall B\in\mathcal{A}$.

(3) $\hat{f}$ がコンパクト台をもつ任意の $f\in\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(\alpha_t(A)B)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-i\beta)\varphi(B\alpha_t(A))dt,\quad \forall A,B\in\mathcal{A}.$$

ここで，$\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の急減少 C^∞ 函数 (i. e.，すべての $m,n\in\boldsymbol{N}$ に対して，$t^mf^{(n)}(t)$ が一様有界) の空間であり，$\hat{f}$ は f の Fourier 変換である（下記の註1参照)．

証明 (1)⇒(2)：$A\in\mathcal{A}_\alpha$, $B\in\mathcal{A}$ のとき，φ が (β,α_t)-KMS 状態であるから，

$$F_{A,B}(t)=\varphi(\alpha_t(A)B),\quad F_{A,B}(t-i\beta)=\varphi(B\alpha_t(A)),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

よって，$F_{A,B}(z)=\varphi(\alpha_z(A)B)$ が整函数であるから，$\varphi(\alpha_t(A)B)=\varphi(B\alpha_{t+i\beta}(A))$.

(2)⇒(3)：$A\in\mathcal{A}$ に対して，$A(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\alpha_t(A)dt$ とおく．$\hat{f}$ の台がコンパクトだから，Paley-Wiener の定理 (下記の註1) より，$f(z)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{isz}\hat{f}(s)ds$ は整函数になる．よって $\alpha_z(A(f))=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-z)\alpha_t(A)dt$ により $A(f)\in\mathcal{A}_\alpha$ となり，(2) から $\varphi(A(f)B)=\varphi(B\alpha_{i\beta}(A(f)))$ が成立する．これに $A(f)$ の定義式を代入して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(\alpha_t(A)B)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-i\beta)\varphi(B\alpha_t(A))dt$$

を得る．

(3)⇒(1)：$A(f)$ を上と同様に定め，$F_{A(f),B}(z)=\varphi(\alpha_z(A(f))B)$ とおくと，これは整函数となり，$F_{A(f),B}(s)=\varphi(\alpha_s(A(f))B)$ $(\forall s\in\boldsymbol{R})$．さらに，函数 $t\longmapsto f(t-s+i\beta)$ に (3) を適用して，

$$\begin{aligned}F_{A(f),B}(s-i\beta)&=\varphi(\alpha_{s-i\beta}(A(f))B)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s+i\beta)\varphi(\alpha_t(A)B)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)\varphi(B\alpha_t(A))dt=\varphi(B\alpha_s(A(f))),\quad \forall s\in\boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

さて，$f_n \geqq 0$ で $\hat{f}_n$ がコンパクト台をもつ $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ がとれて，任意の $\boldsymbol{R}$ 上の有界連続函数 g に対して $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)g(t)dt = g(0)$ となるようにできる．このとき $\|A(f_n)-A\| \to 0$ となり，したがって Phragmen-Lindelöf の原理（下記の註 2）より，$F_{A(f_n),B}(z)$ は $\bar{D}_\beta$ 上で一様収束する．ゆえに，$F_{A,B}(z) = \lim_{n\to\infty} F_{A(f_n),B}(z)$ は D_β で解析的かつ $\bar{D}_\beta$ で有界連続であり，さらに

$$F_{A,B}(s) = \varphi(\alpha_s(A)B), \quad F_{A,B}(s-i\beta) = \varphi(B\alpha_s(A)), \quad \forall s \in \boldsymbol{R}$$

を満たす．▮

註 1　Paley-Wiener の定理：$f \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ のとき，$\hat{f}$（$\hat{f}$ も $\mathcal{S}(\boldsymbol{R})$ に属する）の台が $[-a, a]$ に含まれるための必要十分条件は，f が整函数に拡張できて，かつ，各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|f(z)| \leqq c_n(1+|z|)^{-n}e^{a|\mathrm{Im}z|}$ となる定数 c_n が存在することである．このとき，$f(z)$ は $f(z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isz}\hat{f}(s)ds$（$\hat{f}$ の逆 Fourier 変換）で与えられる．

註 2　Phragmen-Lindelöf の原理：複素函数 $F(z)$ が $D = \{z \in \boldsymbol{C}\,;\, a < \mathrm{Im}\, z < b\}$ で解析的かつ $\bar{D}$ で有界連続であるとき，$|F(z)| \leqq \sup\{|F(t+ia)|, |F(t+ib)|\,;\, t \in \boldsymbol{R}\}$ $(\forall z \in \bar{D})$.

さて，$\varphi \in \mathfrak{S}$ に対して，$\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ を φ による $\mathcal{A}$ の GNS 表現とし，

$$\mathcal{I}_\varphi \equiv \{A \in \mathcal{A}\,;\, \varphi(A^*A) = 0\},$$
$$\mathcal{J}_\varphi \equiv \{A \in \mathcal{A}\,;\, \pi_\varphi(A) = 0\}$$

とおくと，$\mathcal{I}_\varphi$ は左イデアルで $\mathcal{J}_\varphi$ は両側イデアルで，$\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$ となることは容易に証明できる．さらに，

〈定理 5.4〉　$\varphi \in K_\beta(\alpha)$ ならば $\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{J}_\varphi$.

証明　任意の $A \in \mathcal{I}_\varphi$ に対して，$\varphi(BA) = 0$ $(\forall B \in \mathcal{A})$ が成立するから，$\varphi(\alpha_t(A^*)A) = 0$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ となる．したがって，φ が KMS 状態であるから〈定理 5.3〉の（3）の等式を使うと，$\varphi(A\alpha_t(A^*)) = 0$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ が成立する．よって，$\varphi(AA^*) = 0$，すなわち $A^* \in \mathcal{I}_\varphi$ となる．ゆえに，$\varphi \in K_\beta(\alpha)$ であれば，$\mathcal{I}_\varphi$ は両側イデアルである．このことから，任意の $A \in \mathcal{I}_\varphi$ と $B \in \mathcal{A}$ に対して，$\varphi(B^*A^*AB) = 0$ となるが，これは $\pi_\varphi(A)\pi_\varphi(B)x_\varphi = 0$ を意味する．x_φ は巡回ベクトルであるから，$\pi_\varphi(A) = 0$ すなわち $A \in \mathcal{J}_\varphi$．したがって $\mathcal{I}_\varphi \subset \mathcal{J}_\varphi$．逆の包含関係 $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{I}_\varphi$ は上述したように明らかだから，$\mathcal{I}_\varphi = \mathcal{J}_\varphi$．▮

この定理から，次は容易にわかる．

〈系 5.5〉　$\varphi \in K_\beta(\alpha)$ のとき，次が成立する．

（1）　巡回ベクトル x_φ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ に関する分離ベクトルである．

（2）　φ が忠実であることと π_φ が忠実であることは同値である．

任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ に対して，ある β で φ を KMS 状態にする自己同型群 $\alpha_t(t\in\boldsymbol{R})$ が存在するか，さらに存在するとすれば，それはただ1つか，という疑問が生じるが，一意性の問題は次のように答えられている．

〈定理 5.6〉 $\varphi\in\mathfrak{S}$ が忠実であるとき，φ を β で KMS状態にする強連続な1径数自己同型群 $\alpha(\boldsymbol{R})$ は，存在すれば一意である．

証明 α_t, τ_t と2つあったとし，$\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\tau$ をそれぞれ α-解析的および τ-解析的な $\mathcal{A}$ の元の全体とする．任意の $A\in\mathcal{A}_\alpha, B\in\mathcal{A}_\tau$ に対して，$F(z)=\varphi(\alpha_z(A)\tau_z(B))$ とおくと，これは整函数である．$\varphi\in K_\beta(\alpha)\cap K_\beta(\tau)$ だから，〈定理 5.3〉より

$$F(t)=\varphi(\alpha_t(A)\tau_t(B))=\varphi(\tau_t(B)\alpha_{t+i\beta}(A))$$
$$=\varphi(\alpha_{t+i\beta}(A)\tau_{t+i\beta}(B))=F(t+i\beta),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

したがって $F(z)$ は周期 $i\beta$ をもつことがわかった．よって，$F(z)$ が $\bar{D}_\beta$ で有界であることから，$F(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で有界になる．ゆえに $F(t)=F(0)=\varphi(AB)$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．〈補題 5.2〉より $\mathcal{A}_\alpha$ および $\mathcal{A}_\tau$ は $\mathcal{A}$ でノルム稠密だから，

$$\varphi(\alpha_t(A)\tau_t(B))=\varphi(AB),\quad \forall t\in\boldsymbol{R},\ \forall A, B\in\mathcal{A}$$

が示せた．いま，φ による GNS 表現を $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi, U_t{}^\alpha, U_t{}^\tau\}$ とすると，

$$\langle x_\varphi, \pi_\varphi(A)U_t{}^{\alpha*}U_t{}^\tau\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle=\langle x_\varphi, \pi_\varphi(\alpha_t(A))\pi_\varphi(\tau_t(B))x_\varphi\rangle$$
$$=\varphi(\alpha_t(A)\tau_t(B))=\varphi(AB)=\langle x_\varphi, \pi_\varphi(A)\pi_\varphi(B)x_\varphi\rangle$$

が成立する．したがって $U_t{}^\alpha=U_t{}^\tau$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ となり，$\pi_\varphi(\alpha_t(A))=\pi_\varphi(\tau_t(A))$ $(\forall t\in\boldsymbol{R}, \forall A\in\mathcal{A})$ が成立する．仮定より，φ が忠実な KMS 状態であるから，〈系 5.5〉の (2) より π_φ も忠実である．ゆえに $\alpha_t=\tau_t$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$． ▌

註 〈定理 5.6〉は，$\mathcal{A}$ が v.N. 代数で φ が忠実な正規状態の場合でも，α_t を τ^w-連続として同じく成立する．証明は，〈補題 5.2〉の註と Kaplansky の稠密定理を使えば，上と同様である．

α_t-不変な $\varphi\in\mathfrak{S}$ による GNS 表現を $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi, U_t{}^\varphi\}$ とするとき，φ, α_t の v.N. 代数 $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ への（自然な）拡張 $\tilde{\varphi}, \tilde{\alpha}_t{}^\varphi$ は

$$\tilde{\varphi}(Q)=\langle x_\varphi, Qx_\varphi\rangle,\quad Q\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'',$$
$$\tilde{\alpha}_t{}^\varphi(Q)=U_t{}^\varphi QU_t{}^{\varphi*},\quad Q\in\pi_\varphi(\mathcal{A})'',\quad t\in\boldsymbol{R}$$

で定められるが，この拡張 $\tilde{\varphi}, \tilde{\alpha}^\varphi(\boldsymbol{R})$ に関して次の定理は有用である．

〈定理 5.7〉 $\varphi\in K_\beta(\alpha)$ ならば，$\tilde{\varphi}$ は β で $\tilde{\alpha}_t{}^\varphi$ に関して KMS 条件を満たし，$\tilde{\varphi}$ は $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ 上で忠実である．

証明　任意の $Q, R \in \pi_\varphi(\mathcal{A})''$ に対して，列 $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{A}$ が存在して $\|(\pi_\varphi(A_n) - Q)x_\varphi\| + \|(\pi_\varphi(A_n^*) - Q^*)x_\varphi\| \to 0$，$\|(\pi_\varphi(B_n) - R)x_\varphi\| + \|(\pi_\varphi(B_n^*) - R^*)x_\varphi\| \to 0$．このとき，$t$ について一様に

$$\lim_n \varphi(\alpha_t(A_n)B_n) = \lim_n \langle \pi_\varphi(A_n^*)x_\varphi, U_t^{\varphi *}\pi_\varphi(B_n)x_\varphi \rangle = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)R),$$

$$\lim_n \varphi(B_n\alpha_t(A_n)) = \lim_n \langle \pi_\varphi(B_n^*)x_\varphi, U_t^\varphi \pi_\varphi(A_n)x_\varphi \rangle = \tilde{\varphi}(R\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)).$$

各 A_n, B_n に対して，D_β で解析的かつ $\bar{D}_\beta$ で有界連続な複素函数 $F_n(z)$ が存在して，$F_n(t) = \varphi(\alpha_t(A_n)B_n)$，$F_n(t - i\beta) = \varphi(B_n\alpha_t(A_n))$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を満たす．このとき，Phragmen–Lindelöf の原理より $F_n(z)$ は $\bar{D}_\beta$ 上で $F(z)$ に一様収束する．この $F(z)$ は D_β で解析的かつ $\bar{D}_\beta$ で有界連続であり，$F(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)R)$，$F(t - i\beta) = \tilde{\varphi}(R\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q))$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を満たす．したがって $\tilde{\varphi} \in K_\beta(\tilde{\alpha}^\varphi)$ となる．なお，$\tilde{\varphi}$ による $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ の GNS 表現は，恒等表現であるから，忠実である．したがって〈系 5.5〉の（2）より，$\tilde{\varphi}$ は忠実である．▌

状態 $\varphi \in \mathfrak{S}$ に付随する中心 $\mathfrak{Z}_\varphi \equiv \pi_\varphi(\mathcal{A})'' \cap \pi_\varphi(\mathcal{A})'$ は，φ が KMS 状態であれば，次の重要な性質をもつ．

〈定理 5.8〉　$\varphi \in K_\beta(\alpha)$ ならば，任意の $Q \in \mathfrak{Z}_\varphi$ に対して $\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q) = Q$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．

証明　$\varphi \in K_\beta(\alpha)$ だから，前定理より $\tilde{\varphi} \in K_\beta(\tilde{\alpha}^\varphi)$．任意の $A \in \mathcal{A}_\alpha$ に対して，$\tilde{\alpha}_z^\varphi(\pi_\varphi(A)) = \pi_\varphi(\alpha_z(A))$ により $\pi_\varphi(A)$ は $\tilde{\alpha}^\varphi$-解析的となる．したがって，任意の $Q \in \mathfrak{Z}_\varphi$ に対して，$F(z) = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_z^\varphi(\pi_\varphi(A))Q)$ は整函数で，

$$F(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_t^\varphi(\pi_\varphi(A))Q) = \tilde{\varphi}(Q\tilde{\alpha}_{t+i\beta}^\varphi(\pi_\varphi(A)))$$
$$= \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_{t+i\beta}^\varphi(\pi_\varphi(A))Q) = F(t + i\beta), \quad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

を満たす．ゆえに，$F(z)$ は周期 $i\beta$ をもち $\bar{D}_\beta$ で有界だから，$F(z)$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で有界となり，$F(t) = F(0)$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．さらに，$\tilde{\varphi}$ は $\tilde{\alpha}_t^\varphi$-不変だから，

$$\langle \pi_\varphi(A^*)x_\varphi, \tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)x_\varphi \rangle = \tilde{\varphi}(\pi_\varphi(A)\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}_{-t}^\varphi(\pi_\varphi(A))Q)$$
$$= F(-t) = F(0) = \langle \pi_\varphi(A^*)x_\varphi, Qx_\varphi \rangle.$$

$\{\pi_\varphi(\mathcal{A}_\alpha)x_\varphi\}^- = \mathcal{H}_\varphi$ であるから，$\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q)x_\varphi = Qx_\varphi$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．ところで，$x_\varphi$ は分離ベクトルであるから，$\tilde{\alpha}_t^\varphi(Q) = Q$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．▌

ここで，以下の議論のために，いくつかの概念と記号を導入しておこう．

（1）　$\varphi \in \mathfrak{S}$ が**因子状態** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{Z}_\varphi = \boldsymbol{C}I$.

（2）　$I(\alpha) \equiv \{\varphi \in \mathfrak{S}\,;\, \varphi \circ \alpha_t = \varphi, \forall t \in \boldsymbol{R}\}$.

（3）　$\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$，$\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ はそれぞれ $K_\beta(\alpha)$，$I(\alpha)$ の端点の集合．

（4）　$U^\varphi(\boldsymbol{R}) \equiv \{U_t^\varphi\,;\, t \in \boldsymbol{R}\}$.

〈**定理 5.9**〉 $K_\beta(\alpha)$ および $I(\alpha)$ は弱 * コンパクトな凸集合である．

証明 $K_\beta(\alpha)$ について証明する（$I(\alpha)$ も同様）．$K_\beta(\alpha)$ が凸集合であることは明らかだから，弱 * コンパクト性を示す．$I\in\mathcal{A}$ を仮定しているので，〈定理 3.33〉より $\mathfrak{S}$ は弱 * コンパクトであり，$K_\beta(\alpha)\subset\mathfrak{S}$ であるから，$K_\beta(\alpha)$ が弱 * 位相で閉じていることを示せばよい． ネット $\{\varphi_j\}\subset K_\beta(\alpha)$ が $\varphi_j\to\varphi\in\mathfrak{S}$（弱 * 収束）とする． このとき，任意の $A\in\mathcal{A}_\alpha$ と $B\in\mathcal{A}$ に対して，

$$\varphi(AB)=\lim_j\varphi_j(AB)=\lim_j\varphi_j(B\alpha_{i\beta}(A))=\varphi(B\alpha_{i\beta}(A)).$$

よって〈定理 5.3〉より，$\varphi\in K_\beta(\alpha)$．ゆえに $K_\beta(\alpha)$ は弱 * 閉である．▌

この定理と Krein–Milman の定理より，$K_\beta(\alpha)=\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$, $I(\alpha)=\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}\,I(\alpha)$（それぞれ $\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$, $\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ の弱 * 閉凸包）がいえる．

〈**定理 5.10**〉 次が成立する．

（1） $\varphi\in I(\alpha)$ に対して，$\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)\Longleftrightarrow\pi_\varphi(\mathcal{A})'\cap U^\varphi(\boldsymbol{R})'=\boldsymbol{C}I$.

（2） $\varphi\in\mathrm{ex}K_\beta(\alpha)$ ならば $\mathfrak{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$ (i.e., φ は因子状態)．

証明 （1）: $\varphi\in I(\alpha)$ に対して，$\varphi\in\mathrm{ex}\,I(\alpha)$ であることは， いかなる $\psi(\neq\varphi)\in I(\alpha)$ と $\lambda>0$ に対しても $\psi\leqq\lambda\varphi$ とならないことと同値である．また，$\varphi,\psi\in I(\alpha)$ がある $\lambda>0$ で $\psi\leqq\lambda\varphi$ のとき，〈定理 3.36〉における T は $\pi_\varphi(\mathcal{A})'\cap U^\varphi(\boldsymbol{R})'$ に属することが容易にわかる．これらの事実より，（1）は明らか．

（2）: $\mathfrak{Z}_\varphi\neq\boldsymbol{C}I$ とすると， $T\notin\boldsymbol{C}I$ である $T\in(\mathfrak{Z}_\varphi)_+$ が存在する． そこで $\psi(A)=\langle x_\varphi, T\pi_\varphi(A)x_\varphi\rangle$ $(A\in\mathcal{A})$ とおくと，$\psi\neq\varphi$ であり，〈定理 3.36〉よりある $\lambda>0$ で $\psi\leqq\lambda\varphi$ となる．さらに，$\psi\in K_\beta(\alpha)$ が容易にわかるから，$\varphi\notin\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)$ となる．▌

註 実際，$\varphi\in K_\beta(\alpha)$ に対して，『$\varphi\in\mathrm{ex}\,K_\beta(\alpha)\Longleftrightarrow\mathfrak{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$』が成立する． これは，〈定理 5.7〉と第 6 章の〈定理 6.13〉を使って証明される．

5.2 Tomita-Takesaki 理論

この節では，σ-有限 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上に忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が与えられた場合の Tomita–Takesaki 理論を解説する．Tomita–Takesaki 理論は，一般の v.N. 代数上に忠実な**半有限正規荷重** (i.e.,［定義 4.10］の（1),（2）と［定義 4.11］の（1),（2),（4）を満たす写像 $\varphi:\mathfrak{N}_+\to[0,\infty]$）が与えられた場合で成立するし，さらに**左 Hilbert 代数**による定式化もあるが，ここでは Rieffel–van Daele の方法に従って説明しよう．

巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ をもつ v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ を考え, $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ $(A\in\mathfrak{N})$ により忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ を定める. 実際, 忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が与えられたとき, φ による $\mathfrak{N}$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ をとれば, $\mathfrak{N}$ は $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ に $*$ 同型であり, x_φ は $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ に関する巡回かつ分離ベクトルであることに注意する (〈定理 4.46〉参照).

$\mathcal{H}$ は $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$ を内積として実 Hilbert 空間になるが, これを $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ で表す. いま, $\mathcal{K}=\{\mathfrak{N}_{sa}x_0\}^-$ とおくと,

〈**補題 5.11**〉 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ は次の性質をもつ:(1) $\mathcal{K}\cap i\mathcal{K}=\{0\}$; (2) $\{\mathcal{K}+i\mathcal{K}\}^-=\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$.

証明 $\mathcal{K}+i\mathcal{K}\supset\mathfrak{N}x_0$ であり, x_0 が $\mathfrak{N}$ に関して巡回的であるから, (2) が成立する. $A\in\mathfrak{N}_{sa}$, $A'\in\mathfrak{N}'_{sa}$ のとき, $\langle Ax_0, A'x_0\rangle=\langle A'x_0, Ax_0\rangle$ より $\mathrm{Re}\langle iAx_0, A'x_0\rangle=0$. よって $\mathfrak{N}'_{sa}x_0\subset(i\mathcal{K})^\perp$. また, $i\mathfrak{N}'_{sa}x_0\subset i(i\mathcal{K})^\perp=\mathcal{K}^\perp$. したがって $(\mathcal{K}\cap i\mathcal{K})^\perp\supset\mathcal{K}^\perp+(i\mathcal{K})^\perp\supset\mathfrak{N}'x_0$ であり, x_0 が $\mathfrak{N}'$ に関して巡回的であるから, (1) が成立する. ▮

以下しばらく, $\mathcal{K}$ が上の性質 (1), (2) をもつ $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ の閉部分空間であることだけを仮定して, 話を進める.

P, Q をそれぞれ $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ から $\mathcal{K}$, $i\mathcal{K}$ への (実) 射影作用素として, $R=P+Q$ とおく. また, $P-Q$ の $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ における極分解を $P-Q=JT$ で表す. 実 Hilbert 空間における有界作用素の極分解は, 複素 Hilbert 空間においてと同様に与えられる. この場合, T は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上の正の対称作用素 (i.e., $\mathrm{Re}\langle x, Ty\rangle=\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle$) であり, $T^2=(P-Q)^2$.

〈**定理 5.12**〉 上で定めた P, Q, R, T, J に関して, 次が成立する.

(1) R, T は複素線形で, $0\leqq R\leqq 2I$, $0\leqq T\leqq 2I$.

(2) $R, 2I-R, T$ は 1 対 1 で, $T=R^{1/2}(2I-R)^{1/2}$.

(3) J は共役線形な等距離作用素で $J^2=I$, したがって $\langle x, Jy\rangle=\langle y, Jx\rangle$ $(\forall x, y\in\mathcal{H})$.

(4) T は P, Q, R, J と可換.

(5) $JP=(I-Q)J$, $JQ=(I-P)J$, $JR=(2I-R)J$.

証明 (1):簡単な計算より, $iP=Qi$, $Pi=iQ$ がわかる. よって R は複素線形であ

り，$P-Q$ は共役線形である．R は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上の対称作用素であるから，任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle x, Rx\rangle &= \operatorname{Re}\langle ix, Rx\rangle = \operatorname{Re}\langle R(ix), x\rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle x, iRx\rangle = -\operatorname{Im}\langle x, Rx\rangle\end{aligned}$$

となり，$\langle x, Rx\rangle=\operatorname{Re}\langle x, Rx\rangle\geqq 0$．よって $R\geqq 0$．他方，$(P-Q)^2$ も複素線形であり $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上の正の対称作用素であるから，同様に $(P-Q)^2\geqq 0$．したがって，極分解のつくり方より，T は複素線形で $T\geqq 0$ であり，J は共役線形である．さらに，$\|R\|\leqq 2$，$\|T\|\leqq 2$ より，$0\leqq R\leqq 2I$，$0\leqq T\leqq 2I$．

（2）：$Rx=0$ ならば，$\|Px\|^2+\|Qx\|^2=\langle x, Px\rangle+\langle x, Qx\rangle=\langle x, Rx\rangle=0$ より，$Px=Qx=0$．よって $x\in\mathcal{K}^{\perp}\cap(i\mathcal{K})^{\perp}=\{0\}$．したがって R は1対1である．同じ議論を $I-P$ と $I-Q$ に適用して，$2I-R$ が1対1であることがわかる．$T^2=(P-Q)^2=R(2I-R)$ より，T も1対1で $T=R^{1/2}(2I-R)^{1/2}$．

（3）：J が共役線形であることは（1）で示した．$P-Q$ が $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上で対称であるから，J も $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上で対称である．さらに，T が1対1だから，J は等距離作用素である．よって $J^2=I$ となり，内積の等式が成立する．

（4）：$T^2=(P-Q)^2$ が P, Q, R と可換だから，T は P, Q, R と可換である．また，$P-Q$ が $\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ 上で対称だから，$JT=TJ$．

（5）：$TJP=(P-Q)P=(I-Q)(P-Q)=(I-Q)TJ=T(I-Q)J$ より，$JP=(I-Q)J$．同様に $JQ=(I-P)J$．2つの等式を加えて，$JR=(2I-R)J$．▌

上の定理より R のスペクトル分解を用いると，

$$\Delta=R^{-1}(2I-R),\quad \Delta^{it}=R^{-it}(2I-R)^{it},\quad t\in\boldsymbol{R}$$

が定義できる．Δ は一般に非有界な正の自己共役作用素であり，Δ^{it} は τ^s-連続な1径数ユニタリー群である．

〈定理 5.13〉 $\Delta^{-1}=J\Delta J$，$J\Delta^{it}=\Delta^{it}J$，$\Delta^{it}\mathcal{K}=\mathcal{K}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．

証明 〈定理 5.12〉の（5）より，$J\Delta J=(JRJ)^{-1}J(2I-R)J=(2I-R)^{-1}R=\Delta^{-1}$．また，$R$ のスペクトル分解を用いて計算すると，$JR^{it}J=(2I-R)^{-it}$ がわかる．ここで，ベキ it の符号が変わるのは，J が共役線形であることによる．よって $J\Delta^{it}=JR^{-it}(2I-R)^{it}=(2I-R)^{it}R^{-it}J=\Delta^{it}J$．$\Delta^{it}$ は R, J と可換だから，JT とも可換である．したがって Δ^{it} は P と可換であり，$\Delta^{it}\mathcal{K}=\mathcal{K}$ が成立する．▌

次に，Δ^{it} が $\mathcal{K}$ に関連した KMS 型の条件を満たすことを示そう．まず，補題をひとつ与える．

〈補題 5.14〉 $\operatorname{Im} z\leqq 0$ である任意の $z\in\boldsymbol{C}$ に対して，R^{iz} は有界作用素であ

る．函数 $z \longmapsto R^{iz}$ は $\mathrm{Im}\, z \leqq 0$ で τ^s-連続，$\mathrm{Im}\, z<0$ で解析的であり，さらに $-M \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 0$ $(\forall M>0)$ で一様有界である．$(2I-R)^{iz}$ についても，同様なことが成立する．

証明 R のスペクトル分解 $R=\int_0^2 \lambda dE_\lambda$ をとる．$\mathrm{Im}\, z \leqq 0$ のとき，$\lambda \longmapsto \lambda^{iz}$ が区間 $(0, 2)$ で有界だから，$R^{iz}=\int_0^2 \lambda^{iz} dE_\lambda$ は有界作用素である．$-M \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 0$ で $|\lambda^{iz}|=\lambda^{-\mathrm{Im}\, z} \leqq 2^M$ より，R^{iz} は一様有界である．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$R^{iz}(I-E_\varepsilon)=\int_\varepsilon^2 \lambda^{iz} dE_\lambda=\int_\varepsilon^2 e^{iz\log\lambda} dE_\lambda$. よって，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$R^{iz}(I-E_\varepsilon)x$ は $\boldsymbol{C}$ 全体で解析的であることがわかる．$\varepsilon \to 0$ のとき，$-M \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 0$ $(\forall M>0)$ で一様に $R^{iz}(I-E_\varepsilon)x \to R^{iz}x$ (強収束) であるから，R^{iz} は $\mathrm{Im}\, z \leqq 0$ で τ^s-連続かつ $\mathrm{Im}\, z<0$ で解析的である．▌

〈**定理 5.15**〉 任意の $x, y \in \mathcal{K}$ に対して，$D_{-1}=\{z \in \boldsymbol{C}\,;\, 0<\mathrm{Im}\, z<1\}$ で解析的かつ $\bar{D}_{-1}$ で有界連続な複素函数 $F_{x,y}(z)$ が存在して，次の境界条件：

$$F_{x,y}(t)=\langle \Delta^{it}x, y\rangle, \quad F_{x,y}(t+i)=\langle y, \Delta^{it}x\rangle, \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

を満たす．

証明 $x, y \in \mathcal{K}$ とする．$2x=(R+TJ)x=R^{1/2}(R^{1/2}+(2I-R)^{1/2}J)x$ より，$2x_1=(R^{1/2}+(2I-R)^{1/2}J)x$ とおけば，$x=R^{1/2}x_1$. いま，$\bar{D}_{-1/2}=\{z \in \boldsymbol{C}\,;\, 0 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 1/2\}$ 上で $F_{x,y}(z)=\langle x_1, R^{i(z-i/2)}(2I-R)^{-iz}y\rangle$ と定めると，〈補題 5.14〉より $F_{x,y}(z)$ は $D_{-1/2}$ で解析的かつ $\bar{D}_{-1/2}$ で有界連続である．また，

$$F_{x,y}(t)=\langle \Delta^{it}x, y\rangle, \quad F_{x,y}(t+i/2)=\langle (2I-R)^{1/2}x_1, \Delta^{-it}y\rangle, \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}$$

が成立する．ところで，〈定理 5.12〉より

$$2(2I-R)^{1/2}x_1=(2I-R)^{1/2}(R^{1/2}+(2I-R)^{1/2}J)x=(T+JR)x=2Jx$$

となり，$F_{x,y}(t+i/2)=\langle Jx, \Delta^{-it}y\rangle$. 〈定理 5.12〉の (5) より $Jx \in (i\mathcal{K})^\perp=i\mathcal{K}^\perp$ であり，〈定理 5.13〉より $\Delta^{-it}y \in \mathcal{K}$ であるから，$F_{x,y}(t+i/2) \in \boldsymbol{R}$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を得る．したがって，$1/2 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 1$ に対して $F_{x,y}(z)=\overline{F_{x,y}(\bar{z}+i)}$ と定めると，Schwartz の鏡像原理より $F_{x,y}(z)$ は D_{-1} で解析的で，$F_{x,y}(t+i)=\overline{F_{x,y}(t)}=\langle y, \Delta^{it}x\rangle$. ▌

ここで最初の設定に戻り，$\mathfrak{N}$ を巡回かつ分離ベクトル $x_0 \in \mathcal{H}$ をもつ v.N. 代数とし，$\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ とする．〈補題 5.11〉より，$\mathcal{K}=\{\mathfrak{N}_{sa}x_0\}^-$ にこれまでの結果を適用することができて，$P, Q, R, T, J, \Delta, \Delta^{it}$ が定義される．

［**定義 5.2**］ Δ を x_0 (または φ) に関する**モジュラー作用素** (modular operator)，J を x_0 (または φ) に関する**モジュラー共役作用素** (modular conjugation) という．さらに，$\mathcal{K}+i\mathcal{K}$ を定義域とする作用素 S を $S(x+y)=x-y$ $(x$

$\in\mathcal{K}, y\in i\mathcal{K}$) で定める．また，$\mathcal{K}'=\{\mathfrak{N}'_{sa}x_0\}^-$ とし，$\mathcal{K}'+i\mathcal{K}'$ を定義域とする作用素 F を $F(x'+y')=x'-y'$ ($x'\in\mathcal{K}', y'\in i\mathcal{K}'$) で定める．

〈定理 5.16〉 (1)　S は Ax_0 ($A\in\mathfrak{N}$) を A^*x_0 に写す作用素の閉包である．

(2)　F は $A'x_0$ ($A'\in\mathfrak{N}'$) を A'^*x_0 に写す作用素の閉包である．

(3)　$F=JSJ=S^*$.

(4)　S,F の極分解は $S=J\Delta^{1/2}$, $F=J\Delta^{-1/2}$.

証明　(1)：S が閉作用素であることは，$\mathcal{K}$, $i\mathcal{K}$ が閉部分空間であることより容易にわかる．$\mathfrak{N}x_0\subset\mathcal{K}+i\mathcal{K}$ で，$S(Ax_0)=A^*x_0$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) も明らかである．任意の $x\in\mathcal{K}$, $y\in i\mathcal{K}$ に対して，$B_nx_0\to x$, $iC_nx_0\to y$ となる列 $\{B_n\}, \{C_n\}\subset\mathfrak{N}_{sa}$ をとり $A_n=B_n+iC_n$ とおくと，$A_nx_0\to x+y$, $A_n^*x_0\to x-y$ が成立する．よって S は作用素 $Ax_0\longmapsto A^*x_0$ の閉包である．(2) も (1) と同様である．

(3)：〈補題 5.11〉の証明より，$i\mathcal{K}'\subset\mathcal{K}^\perp$ が成立する．さらに，$\{\mathcal{K}+i\mathcal{K}'\}^-=\mathcal{H}_{\boldsymbol{R}}$ が証明できる (Takesaki [25] の p. 224 参照)．ゆえに $\mathcal{K}^\perp=i\mathcal{K}'$ が成立する．よって〈定理 5.12〉の (5) より，$J\mathcal{K}=i\mathcal{K}^\perp=\mathcal{K}'$, $J(i\mathcal{K})=\mathcal{K}^\perp=i\mathcal{K}'$．したがって $\mathrm{dom}(JSJ)=J(\mathrm{dom}\,S)=\mathrm{dom}\,F$ であり，任意の $x\in\mathcal{K}$, $y\in i\mathcal{K}$ に対して $JS(x+y)=Jx-Jy=FJ(x+y)$．よって $F=JSJ$．次に，任意の $x\in\mathcal{K}$, $y\in i\mathcal{K}$, $x'\in\mathcal{K}'$, $y'\in i\mathcal{K}'$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle S(x+y), x'+y'\rangle&=\mathrm{Re}\langle x-y, x'+y'\rangle=\mathrm{Re}\langle x, x'\rangle-\mathrm{Re}\langle y, y'\rangle\\&=\mathrm{Re}\langle x+y, x'-y'\rangle=\mathrm{Re}\langle x+y, F(x'+y')\rangle.\end{aligned}$$

S の共役線形性に注意して，$\langle S(x+y), x'+y'\rangle=\langle F(x'+y'), x+y\rangle$ を得る．よって $F\subset S^*$．ところで，$w\in\mathrm{dom}\,S^*$ ならば，$\langle S^*w, x+y\rangle=\langle x-y, w\rangle$ ($\forall x\in\mathcal{K}, \forall y\in i\mathcal{K}$)．$y=0$ として $\mathrm{Re}\langle w-S^*w, x\rangle=0$ ($\forall x\in\mathcal{K}$) となるから，$w-S^*w\in\mathcal{K}^\perp=i\mathcal{K}'$．同様に $x=0$ として，$w+S^*w\in i\mathcal{K}^\perp=\mathcal{K}'$．よって $w\in\mathrm{dom}\,F$．したがって $F=S^*$ が示せた．

(4)：(3) より $(JS)^*=S^*J=FJ=JS$ となり，JS は自己共役である．任意の $x\in\mathcal{K}$, $y\in i\mathcal{K}$ に対して，

$$\begin{aligned}RFJ(x+y)&=(P+Q)(Jx-Jy)=PJx-QJy\\&=(P-Q)(Jx+Jy)=T(x+y).\end{aligned}$$

したがって，任意の $w\in\mathrm{dom}\,S$ に対して，$RJSw=R^{1/2}(2I-R)^{1/2}w$ となり，$JSw=R^{-1/2}(2I-R)^{1/2}w$．よって $w\in\mathrm{dom}\,\Delta^{1/2}$ で $JSw=\Delta^{1/2}w$．JS が自己共役であるから，$JS=\Delta^{1/2}$ となり $S=J\Delta^{1/2}$．さらに，〈定理 5.13〉より $\Delta^{-1/2}=J\Delta^{1/2}J$ であるから，$F=\Delta^{1/2}J=J\Delta^{-1/2}$. ∎

さて，モジュラー作用素に関する Tomita の基本定理は，

〈定理 5.17〉　Tomita の基本定理：(1)　$J\mathfrak{N}J=\mathfrak{N}'$.

(2) $\Delta^{it}\mathfrak{R}\Delta^{-it}=\mathfrak{R},\ \ \forall t\in\boldsymbol{R}.$

これを証明するために，いくつかの補題を用意する.

〈補題 5.18〉 (1) 任意の $A'\in\mathfrak{R}'_{sa}$ と $\mathrm{Re}\lambda>0$ である任意の $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，$A\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して

$$\langle A'x_0, Bx_0\rangle=\mathrm{Re}(\lambda\langle Ax_0, Bx_0\rangle),\quad \forall B\in\mathfrak{R}_{sa}.$$

(2) 任意の $A'\in\mathfrak{R}'_{sa}$ に対して，$A\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して $JTA'x_0=Ax_0$.

証明 (1)：$A'=I$ のときは，$A=(\mathrm{Re}\lambda)^{-1}I$ にとればよい．したがって，線形性から，$\mathrm{Re}\lambda=1$ かつ $0\leqq A'\leqq I$ としてよい．いま，自己共役な $\psi\in\mathfrak{R}_*$ の全体を $(\mathfrak{R}_*)_{sa}$ で書くと，〈定理 4.10〉を考慮して，$(\mathfrak{R}_*)_{sa}$ が実 Banach 空間で $((\mathfrak{R}_*)_{sa})^*=\mathfrak{R}_{sa}$ であることがわかる．$A\in\mathfrak{R}_{sa}$ に対して，$\psi, \psi_A\in(\mathfrak{R}_*)_{sa}$ を $\psi(B)=\langle A'x_0, Bx_0\rangle$, $\psi_A(B)=\mathrm{Re}(\lambda\langle Ax_0, Bx_0\rangle)$ $(B\in\mathfrak{R}_{sa})$ で定める．$A\longmapsto\psi_A$ は $(\mathfrak{R}_{sa}, \tau^w)$ から $((\mathfrak{R}_*)_{sa}$, 弱 * 位相) への連続写像であるから，$\mathcal{F}=\{\psi_A\,;\,A\in(\mathfrak{R}_1)_{sa}\}$ は弱 * コンパクトな凸集合になる．$\psi\notin\mathcal{F}$ とすると，Hahn-Banach の定理より，ある $B\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して $\psi_A(B)<\psi(B)$ $(\forall A\in(\mathfrak{R}_1)_{sa})$. B の極分解 $B=W|B|$ をとると，$B\in\mathfrak{R}_{sa}$ より $W\in\mathfrak{R}_{sa}$. $A=W$ とおいて，$\mathrm{Re}\lambda=1$, $0\leqq A'\leqq I$ を使うと，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda\langle Wx_0, Bx_0\rangle)&<\langle A'x_0, Bx_0\rangle\leqq\langle A'x_0, |B|x_0\rangle\\&\leqq\langle x_0, |B|x_0\rangle=\langle Wx_0, Bx_0\rangle=\mathrm{Re}(\lambda\langle Wx_0, Bx_0\rangle)\end{aligned}$$

となり矛盾である．よって $\psi\in\mathcal{F}$ となり，(1) が示せた.

(2)：(1) で $\lambda=1$ とおくと，$A\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して $\langle A'x_0, Bx_0\rangle=\mathrm{Re}\langle Ax_0, Bx_0\rangle$ $(\forall B\in\mathfrak{R}_{sa})$. したがって $\mathrm{Re}\langle Ax_0, x\rangle=\mathrm{Re}\langle Ax_0, Px\rangle=\mathrm{Re}\langle A'x_0, Px\rangle=\mathrm{Re}\langle PA'x_0, x\rangle$ $(\forall x\in\mathcal{H})$ が成立し，$Ax_0=PA'x_0$. また，$A'x_0\in\mathcal{K}'=i\mathcal{K}^{\perp}$ より，$QA'x_0=0$. よって $Ax_0=JTA'x_0$. ▮

〈補題 5.19〉 任意の $A'\in\mathfrak{R}'$ と $\mathrm{Re}\lambda>0$ である任意の $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，$A\in\mathfrak{R}$ が存在して

$$TJA'JT=\lambda(2I-R)AR+\bar{\lambda}RA(2I-R).$$

証明 線形性から，$A'\in\mathfrak{R}'_{sa}$ としてよい．〈補題 5.18〉の (1) で A を $2A$ で置き換えれば，$A\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して

$$\langle A'x_0, Bx_0\rangle=\lambda\langle Ax_0, Bx_0\rangle+\bar{\lambda}\langle Bx_0, Ax_0\rangle,\quad \forall B\in\mathfrak{R}_{sa}.$$

よって $\langle A'x_0, Bx_0\rangle=\lambda\langle Ax_0, Bx_0\rangle+\bar{\lambda}\langle B^*x_0, Ax_0\rangle$ $(\forall B\in\mathfrak{R})$ が成立するから，

$$\langle A'Bx_0, Cx_0\rangle=\lambda\langle BAx_0, Cx_0\rangle+\bar{\lambda}\langle Bx_0, CAx_0\rangle,\quad \forall B, C\in\mathfrak{R}.$$

任意の $B', C'\in\mathfrak{R}'_{sa}$ に対して，〈補題 5.18〉の (2) より，$B, C\in\mathfrak{R}_{sa}$ が存在して $JTB'x_0=Bx_0$, $JTC'x_0=Cx_0$. したがって〈定理 5.16〉を使うと，

$$\begin{aligned}\langle A'JTB'x_0, JTC'x_0\rangle &= \lambda\langle BAx_0, JTC'x_0\rangle+\bar{\lambda}\langle JTB'x_0, CAx_0\rangle\\ &= \lambda\langle J\Delta^{1/2}ABx_0, JTC'x_0\rangle+\bar{\lambda}\langle JTB'x_0, J\Delta^{1/2}ACx_0\rangle\\ &= \lambda\langle TC'x_0, \Delta^{1/2}ABx_0\rangle+\bar{\lambda}\langle \Delta^{1/2}ACx_0, TB'x_0\rangle\\ &= \lambda\langle (2I-R)C'x_0, ABx_0\rangle+\bar{\lambda}\langle ACx_0, (2I-R)B'x_0\rangle\\ &= \lambda\langle (2I-R)C'x_0, AJTB'x_0\rangle+\bar{\lambda}\langle AJTC'x_0, (2I-R)B'x_0\rangle.\end{aligned}$$

ところで，$QB'x_0=0$ より $JTB'x_0=RB'x_0$．同様に $JTC'x_0=RC'x_0$．よって

$$\langle C'x_0, TJA'JTB'x_0\rangle=\lambda\langle C'x_0, (2I-R)ARB'x_0\rangle+\bar{\lambda}\langle C'x_0, RA(2I-R)B'x_0\rangle$$

となり，$\{\mathfrak{N}'_{sa}x_0+i\mathfrak{N}'_{sa}x_0\}^-=\mathscr{H}$ より，求める式が得られる．▌

〈補題 5.20〉 $\lambda=e^{i\theta/2}$，$-\pi<\theta<\pi$ のとき，$F(z)$ が $|\mathrm{Re}\,z|\leqq 1/2$ で有界連続かつその内部で解析的な複素函数ならば，

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\{\lambda F(it+1/2)+\bar{\lambda}F(it-1/2)\}\,dt.$$

証明 複素函数 $G(z)=\pi e^{i\theta z}(\sin\pi z)^{-1}F(z)$ を考える．$G(z)$ は $|\mathrm{Re}\,z|<1/2$ で $z=0$ を除いて解析的であり，$z=0$ は1位の極である．$z=0$ での留数は $\lim_{z\to 0} zG(z)=F(0)$．$z=s+it$ とおくと，$|\theta|<\pi$ より，$|s|\leqq 1/2$ で $t\to\pm\infty$ のとき $G(s+it)\to 0$．長方形 $-1/2\leqq s\leqq 1/2$，$-r\leqq t\leqq r$ の周に留数定理を用いて，$r\to\infty$ とすれば，

$$F(0)=(2\pi i)^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}G(it+1/2)i\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}G(it-1/2)i\,dt\right\}.$$

$\sin\pi(it\pm 1/2)=\pm(e^{\pi t}+e^{-\pi t})/2$，$e^{i\theta(it+1/2)}=\lambda e^{-\theta t}$，$e^{i\theta(it-1/2)}=\bar{\lambda}e^{-\theta t}$ を代入して，求める式が得られる．▌

〈補題 5.20〉を用いて，〈補題 5.19〉の A に関する作用素方程式を次のように解くことができる．

〈補題 5.21〉 A', λ, A を〈補題 5.19〉と同じとする．$\lambda=e^{i\theta/2}$，$-\pi<\theta<\pi$ のとき，

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt.$$

証明 任意の $x, y\in\mathscr{H}$ に対して，$|\mathrm{Re}\,z|\leqq 1/2$ で

$$F(z)=\langle x, R^{-z+1/2}(2I-R)^{z+1/2}AR^{z+1/2}(2I-R)^{-z+1/2}y\rangle$$

と定めると，〈補題 5.14〉より，$F(z)$ は〈補題 5.20〉の仮定を満たすことがわかる．また，

$$\begin{aligned}F(it+1/2)&=\langle x, R^{-it}(2I-R)^{it+1}AR^{it+1}(2I-R)^{-it}y\rangle\\ &=\langle x, \Delta^{it}(2I-R)AR\Delta^{-it}y\rangle,\\ F(it-1/2)&=\langle x, R^{-it+1}(2I-R)^{it}AR^{it}(2I-R)^{-it+1}y\rangle\end{aligned}$$

$$=\langle x, \Delta^{it}Rx(2I-R)\Delta^{-it}y\rangle.$$

よって〈補題 5.19〉より，

$$\lambda F(it+1/2)+\bar{\lambda}F(it-1/2)=\langle x, \Delta^{it}TJA'JT\Delta^{-it}y\rangle.$$

ところで，$F(0)=\langle x, TATy\rangle$ であるから，〈補題 5.20〉より

$$\langle x, TATy\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\langle x, \Delta^{it}TJA'JT\Delta^{-it}y\rangle dt$$

$$=\left\langle x, T\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}dt\right\}Ty\right\rangle.$$

T が 1 対 1 より $\overline{\mathrm{ran}}T=\mathcal{H}$ であるから，求める式が得られる．▮

〈補題 5.22〉 任意の $A'\in\mathfrak{N}'$ に対して，$\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}\in\mathfrak{N}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$.

証明 任意の $B'\in\mathfrak{N}'$ と $x, y\in\mathcal{H}$ に対して，$\boldsymbol{R}$ 上の有界連続函数 $f(t)$ を

$$f(t)=\langle x, B'\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}y\rangle-\langle x, \Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}B'y\rangle$$

と定める．$-\pi<\theta<\pi$ のとき，$\lambda=e^{i\theta/2}$ に対して〈補題 5.19〉で与えた A をとると，〈補題 5.21〉より

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta t}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}f(t)dt=\langle x, B'Ay\rangle-\langle x, AB'y\rangle=0.$$

$|\mathrm{Re}\,z|<\pi$ で $F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{zt}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}f(t)dt$ と定めると，$F(z)$ は $|\mathrm{Re}\,z|<\pi$ で解析的で $F(\theta)=0$ $(-\pi<\forall\theta<\pi)$ となるから，$F(z)\equiv 0$ でなければならない．よって，$z=is$ とおいて，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}(e^{\pi t}+e^{-\pi t})^{-1}f(t)dt=0$ $(\forall s\in\boldsymbol{R})$. Fourier 変換の単射性より，$f(t)\equiv 0$. したがって $\Delta^{it}JA'J\Delta^{-it}\in\mathfrak{N}''=\mathfrak{N}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$. ▮

〈定理 5.17〉の証明 （1）を証明すれば，（2）は〈補題 5.22〉より明らかである．〈補題 5.22〉で $t=0$ とおいて，$J\mathfrak{N}'J\subset\mathfrak{N}$ が成立する．いま，$\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{N}'$，$\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ の役割を入れ換えたとき，〈定理 5.16〉の（4）より，モジュラー共役作用素は同じ J であることがわかる．よって $J\mathfrak{N}J\subset\mathfrak{N}'$ が成立する．したがって（1）が成立する．▮

［定義 5.3］ $\sigma_t^{\varphi}(A)=\Delta^{it}A\Delta^{-it}$ $(A\in\mathfrak{N}, t\in\boldsymbol{R})$ と定めると，前定理より σ_t^{φ} は $\mathfrak{N}$ の τ^s-連続な 1 径数自己同型群となる．σ_t^{φ} を x_0（または φ）に関する**モジュラー自己同型群** (modular automorphism group) という．

Takesaki はモュジラー自己同型群と KMS 条件を結びつける次の重要な定理を与えた．

〈定理 5.23〉　φ は σ_t^{φ} に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．さらに，σ_t^{φ} はこのような τ^s-連続な 1 径数自己同型群として一意に定まる．

証明　後半の一意性は，〈定理 5.6〉の註よりわかる．そこで前半を示そう．まず，$Rx_0=x_0$ より $\Delta^{it}x_0=x_0$ に注意する．任意の $A, B\in\mathfrak{N}_{sa}$ に対して，〈定理 5.15〉より D_{-1} で解析的かつ $\bar{D}_{-1}$ で有界連続な $F_{A,B}$ が存在して，

$$F_{A,B}(t)=\langle\Delta^{it}Ax_0, Bx_0\rangle=\langle\Delta^{it}A\Delta^{-it}x_0, Bx_0\rangle$$
$$=\langle\sigma_t^{\varphi}(A)x_0, Bx_0\rangle=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(A)B),$$
$$F_{A,B}(t+i)=\overline{F_{A,B}(t)}=\varphi(B\sigma_t^{\varphi}(A)),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

線形性から，任意の $A, B\in\mathfrak{N}$ に対しても同様のことがいえる．よって φ は σ_t^{φ} に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．▌

この定理と〈定理 5.1〉より，φ が σ_t^{φ}-不変であることがわかる．

〈定理 5.24〉　任意の $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ に対して，$\sigma_t^{\varphi\circ\alpha}=\alpha^{-1}\circ\sigma_t^{\varphi}\circ\alpha$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．

証明　任意の $A, B\in\mathfrak{N}$ に対して，$\alpha(A), \alpha(B)$ に KMS 条件を適用すると，D_{-1} で解析的かつ $\bar{D}_{-1}$ で有界連続な $F_{A,B}(z)$ が存在して，

$$F_{A,B}(t)=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(\alpha(A))\alpha(B))=\varphi\circ\alpha((\alpha^{-1}\circ\sigma_t^{\varphi}\circ\alpha(A))B),$$
$$F_{A,B}(t+i)=\varphi(\alpha(B)\sigma_t^{\varphi}(\alpha(A))=\varphi\circ\alpha(B(\alpha^{-1}\circ\sigma_t^{\varphi}\circ\alpha(A))),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

よって $\varphi\circ\alpha$ は $\alpha^{-1}\circ\sigma_t^{\varphi}\circ\alpha$ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．したがって〈定理 5.23〉より，$\sigma_t^{\varphi\circ\alpha}=\alpha^{-1}\circ\sigma_t^{\varphi}\circ\alpha$．▌

［定義 5.4］　$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\mathfrak{N}_{\psi}\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\psi(AB)=\psi(BA),\ \forall B\in\mathfrak{N}\}$ を ψ の**中心化代数** (centralizer) という．$\mathfrak{N}_{\psi}$ が $\mathfrak{N}$ の $*$ 部分代数であることはすぐにわかる．

〈定理 5.25〉　$\mathfrak{N}_{\varphi}$ は σ_t^{φ} の不動点代数に等しい．すなわち，$\mathfrak{N}_{\varphi}=\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\sigma_t^{\varphi}(A)=A,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\}$．

証明　$A\in\mathfrak{N}$ と σ^{φ}-解析的な $B\in\mathfrak{N}$ に対して，整函数 $F_{B,A}(z)$ が存在して，

$$F_{B,A}(t)=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(B)A)=\varphi(B\sigma_{-t}^{\varphi}(A)),$$
$$F_{B,A}(t+i)=\varphi(A\sigma_t^{\varphi}(B)),\quad t\in\boldsymbol{R}.$$

$\sigma_t^{\varphi}(A)=A$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ ならば，$F_{B,A}(t)\equiv\varphi(BA)$ となり $F_{B,A}(z)\equiv\varphi(BA)$．よって $\varphi(AB)=\varphi(BA)$．σ^{φ}-解析的な $B\in\mathfrak{N}$ の全体は $\mathfrak{N}$ で τ^{w}-稠密である（〈補題 5.2〉の註参照）から，$A\in\mathfrak{N}_{\varphi}$．逆に，$A\in\mathfrak{N}_{\varphi}$ ならば，$F_{B,A}(t)=F_{B,A}(t+i)$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ となり $F_{B,A}(z)$ は周期 i をもつ．よって Liouville の定理より，$F_{B,A}(z)$ は定数である．したがって，

$$\langle B^* x_0, \sigma_{-t}{}^{\varphi}(A) x_0 \rangle = \varphi(B\sigma_{-t}{}^{\varphi}(A)) = \varphi(BA) = \langle B^* x_0, A x_0 \rangle$$

がすべての σ^{φ}-解析的な $B \in \mathfrak{N}$ に対して成立する．x_0 が $\mathfrak{N}$ に関する巡回かつ分離ベクトルであるから，$\sigma_t{}^{\varphi}(A) = A$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を得る．▌

〈定理 5.25〉より，$A \in \mathfrak{Z}$ ならば $\sigma_t{}^{\varphi}(A) = A$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ がわかるが，これは〈定理 5.8〉で示したことである．さらに，φ がトレースであることと $\sigma_t{}^{\varphi} = 1$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ が同値であることもわかる．

5.3 接　合　積

この節では，v.N. 代数の接合積を定義し，Takesaki の双対定理を証明する．$\mathfrak{N}$ を $\mathcal{H}$ 上の v.N. 代数とし，G を局所コンパクト群とする．α が G から $\mathfrak{N}$ の＊自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ への τ^w-連続 (i.e., 任意の $A \in \mathfrak{N}$ に対して，$g \in G \mapsto \alpha_g(A) \in \mathfrak{N}$ が τ^w-連続) な準同型写像であるとき，α を G の $\mathfrak{N}$ 上の**連続作用**という．このとき，3 つ組 $(\mathfrak{N}, G, \alpha)$ を $\boldsymbol{W^*}$ **力学系**と呼ぶ．なお，連続作用 α は実際 τ^{us*}-連続となることに注意しよう．これは，任意の $A \in \mathfrak{N}$ と $\varphi \in \mathfrak{N}_*$ に対して，〈定理 4.1〉より $\varphi((\alpha_g(A) - A)^*(\alpha_g(A) - A)) = \varphi(\alpha_g(A^*A)) - \varphi(\alpha_g(A^*)A) - \varphi(A^*\alpha_g(A)) + \varphi(A^*A) \to 0$ $(g \to e)$ となることからわかる．

G 上の左 Haar 測度 dg に関して Hilbert 空間 $L^2(G)$ および $L^2(G, \mathcal{H})$ をつくると，1.6 節Ⅳで述べたように $\mathcal{H} \otimes L^2(G) \cong L^2(G) \otimes \mathcal{H} \cong L^2(G, \mathcal{H})$．以下，$\mathcal{H} \otimes L^2(G) = L^2(G, \mathcal{H})$ と同一視する．G の $\mathfrak{N}$ 上の連続作用 α が与えられたとき，各 $A \in \mathfrak{N}, g \in G$ に対して，$\pi_\alpha(A), \lambda(g) \in \boldsymbol{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ を

$$(\pi_\alpha(A)\xi)(h) = \alpha_{h^{-1}}(A)\xi(h), \quad (\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad \xi \in L^2(G, \mathcal{H})$$

と定める．

〈補題 5.26〉　(1)　π_α は $\mathfrak{N}$ の $L^2(G, \mathcal{H})$ 上の忠実な正規表現である．

(2)　λ は G の $L^2(G, \mathcal{H})$ 上の τ^s-連続なユニタリー表現である．

(3)　任意の $A \in \mathfrak{N}, g \in G$ に対して，$\pi_\alpha(\alpha_g(A)) = \lambda(g)\pi_\alpha(A)\lambda(g)^*$．

証明　(1)：まず，α の連続性から $\pi_\alpha(A)\xi$ は可測であり，$\|\pi_\alpha(A)\xi\|^2 = \int_G \|\alpha_{h^{-1}}(A)\xi(h)\|^2 dh \leq \|A\|^2\|\xi\|^2$．よって，確かに $\pi_\alpha(A) \in \boldsymbol{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ である．π_α が表現であることは容易にわかる．$\pi_\alpha(A) = 0$ とすると，任意の $x \in \mathcal{H}, f \in L^2(G)$ に対して $\xi = x \otimes f$ とおいて，$\int_G \langle x, \alpha_{h^{-1}}(A)x \rangle |f(h)|^2 dh = \langle \xi, \pi_\alpha(A)\xi \rangle = 0$．よって $\langle x, \alpha_{h^{-1}}(A)x \rangle = 0$

$(\forall x\in\mathcal{H},\ \forall h\in G)$ となり，$h=e$（単位元）とおいて $A=0$. したがって π_α は忠実である．$A_j\uparrow A$ となるネット $\{A_j\}\subset\mathfrak{N}_+$ に対して，$\tilde{A}\in\boldsymbol{B}(L^2(G,\mathcal{H}))$ が存在して $\pi_\alpha(A_j)\uparrow\tilde{A}\leqq\pi_\alpha(A)$. 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，$\langle x,\alpha_{h^{-1}}(A_j)x\rangle\to\langle x,\alpha_{h^{-1}}(A)x\rangle$（単調増加）であり，さらにDiniの定理より，この収束は G の任意のコンパクト部分集合上で一様収束である．よって，任意の $f\in L^2(G)$ に対して $\xi=x\otimes f$ とおいて，

$$\langle\xi,\pi_\alpha(A_j)\xi\rangle=\int_G\langle x,\alpha_{h^{-1}}(A_j)x\rangle|f(h)|^2dh$$
$$\to\int_G\langle x,\alpha_{h^{-1}}(A)x\rangle|f(h)|^2dh=\langle\xi,\pi_\alpha(A)\xi\rangle.$$

したがって $\langle\xi,(\pi_\alpha(A)-\tilde{A})\xi\rangle=0$ となり，$(\pi_\alpha(A)-\tilde{A})\xi=0$. ゆえに $\tilde{A}=\pi_\alpha(A)$ となるから，π_α は正規である．

（2）：左Haar測度を用いているから，$\|\lambda(g)\xi\|=\|\xi\|$ が成立し，$\lambda(g)$ は $L^2(G,\mathcal{H})$ 上の等距離作用素である．また，$\lambda(g_1g_2)=\lambda(g_1)\lambda(g_2)$，$\lambda(g^{-1})=\lambda(g)^{-1}$ は明らか．したがって λ は G のユニタリー表現である．$\xi=x\otimes f$ $(x\in\mathcal{H},f\in L^2(G))$ に対して，

$$\|\lambda(g)\xi-\xi\|^2=\|x\|^2\int_G|f(g^{-1}h)-f(h)|^2dh\to0\quad(g\to e).$$

よって λ は τ^s-連続である．

（3）：$$(\lambda(g)\pi_\alpha(A)\lambda(g)^*\xi)(h)=(\pi_\alpha(A)\lambda(g)^*\xi)(g^{-1}h)=\alpha_{h^{-1}g}(A)(\lambda(g)^*\xi)(g^{-1}h)$$
$$=\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(A))\xi(h)=(\pi_\alpha(\alpha_g(A))\xi)(h).$$ ∎

［定義5.5］ $\{\pi_\alpha(A)\,;\,A\in\mathfrak{N}\}$ と $\{\lambda(g)\,;\,g\in G\}$ により生成される $\mathcal{H}\otimes L^2(G)=L^2(G,\mathcal{H})$ 上のv.N.代数を $\mathfrak{N}$ の α による**接合積**（crossed product）といい，$\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ または $\mathfrak{N}(\mathfrak{N},\alpha)$ で表す．すなわち $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G=\{\pi_\alpha(\mathfrak{N})\cup\lambda(G)\}''$.

〈補題5.26〉の（3）より，$\{\pi_\alpha(A)\lambda(g)\,;\,A\in\mathfrak{N},g\in G\}$ からとった有限個の線形結合の全体は $\boldsymbol{B}(L^2(G,\mathcal{H}))$ の＊部分代数となり，$\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ はその τ^s-閉包に等しい．

以下，G を局所コンパクト可換群とし，$\hat{G}$ を G の双対群とする．$g\in G$，$\gamma\in\hat{G}$ に対して $\gamma(g)=\langle g,\gamma\rangle$ と書く．各 $\gamma\in\hat{G}$ に対して $\mu(\gamma)\in\mathcal{U}(L^2(G,\mathcal{H}))$ を $(\mu(\gamma)\xi)(h)=\overline{\langle h,\gamma\rangle}\xi(h)$ $(\xi\in L^2(G,\mathcal{H}))$ で定めると，μ は $\hat{G}$ の $L^2(G,\mathcal{H})$ 上の τ^s-連続なユニタリー表現である．

〈補題5.27〉 （1） $\mu(\gamma)\pi_\alpha(A)\mu(\gamma)^*=\pi_\alpha(A)$，$\forall A\in\mathfrak{N},\forall\gamma\in\hat{G}$.

（2） $\mu(\gamma)\lambda(g)\mu(\gamma)^*=\overline{\langle g,\gamma\rangle}\lambda(g)$，$\forall g\in G,\forall\gamma\in\hat{G}$.

証明 (1): $(\mu(\gamma)\pi_\alpha(A)\xi)(h)=\overline{\langle h,\gamma\rangle}\alpha_{h^{-1}}(A)\xi(h)$

$$=\alpha_{h^{-1}}(A)\overline{\langle h,\gamma\rangle}\xi(h)=(\pi_\alpha(A)\mu(\gamma)\xi)(h).$$

(2): $(\mu(\gamma)\lambda(g)\mu(\gamma)^*\xi)(h)=\overline{\langle h,\gamma\rangle}(\mu(\gamma)^*\xi)(g^{-1}h)$

$$=\overline{\langle h,\gamma\rangle}\langle g^{-1}h,\gamma\rangle\xi(g^{-1}h)=\overline{\langle g,\gamma\rangle}(\lambda(g)\xi)(h).$$ ▮

[**定義 5.6**] 上の補題より，$\hat{G}$ の $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ 上の連続作用 $\hat{\alpha}$ を $\hat{\alpha}_\gamma=\mathrm{Ad}(\mu(\gamma))$，すなわち $\hat{\alpha}_\gamma(X)=\mu(\gamma)X\mu(\gamma)^*$ $(X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G,\gamma\in\hat{G})$ で定義できる．$\hat{\alpha}$ を α の**双対作用** (dual action) という．

〈**定理 5.28**〉 α,β をそれぞれ v.N. 代数 $\mathfrak{N},\mathfrak{M}$ 上の G の連続作用とする．$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ の上への＊同型写像 κ が存在して $\kappa\circ\alpha_g=\beta_g\circ\kappa$ $(\forall g\in G)$ を満たすならば，$\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ から $\mathfrak{M}\rtimes_\beta G$ の上への＊同型写像 $\tilde{\kappa}$ が存在して $\tilde{\kappa}\circ\pi_\alpha=\pi_\beta\circ\kappa$, $\tilde{\kappa}\circ\hat{\alpha}_\gamma=\hat{\beta}_\gamma\circ\tilde{\kappa}$ $(\forall\gamma\in\hat{G})$ を満たす．

証明 $\tilde{\kappa}=\kappa\otimes 1$ は $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ から $\mathfrak{M}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ への＊同型写像である．G の Borel 有限分割の全体は，細分により順序を入れると，有向集合になる．任意の $A\in\mathfrak{N}$ と分割 $\nu=\{F_1,\cdots,F_n\}$ に対して，$h_i\in F_i$ をとり $\tilde{A}_\nu=\sum_{i=1}^n\alpha_{h_i^{-1}}(A)\otimes M_{F_i}$ (ただし M_{F_i} は F_i の定義函数による掛算作用素) とおくと，ネット $\{\tilde{A}_\nu\}\subset\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ が得られる．$\xi=x\otimes f$ $(x\in\mathcal{H},f\in L^2(G))$ に対して，

$$\|\pi_\alpha(A)\xi-\tilde{A}_\nu\xi\|^2=\sum_{i=1}^n\int_{F_i}\|\alpha_{h^{-1}}(A)x-\alpha_{h_i^{-1}}(A)x\|^2|f(h)|^2dh.$$

任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\int_{G\backslash K}|f(h)|^2dh<\varepsilon^2$ となるコンパクト集合 $K\subset G$ をとり，さらに K の分割 $\{F_1',\cdots,F_m'\}$ を $\|\alpha_{h^{-1}}(A)x-\alpha_{h'^{-1}}(A)x\|<\varepsilon$ $(\forall h,h'\in F_i')$ となるようにとる．分割 ν が $\{F_1',\cdots,F_m',G\backslash K\}$ の細分である限り，

$$\|\pi_\alpha(A)\xi-\tilde{A}_\nu\xi\|^2\leqq(2\|A\|\|x\|)^2\varepsilon^2+\|f\|^2\varepsilon^2$$

が成立する．したがって $\tilde{A}_\nu\xrightarrow{s}\pi_\alpha(A)$ が示せた．また，$\tilde{\kappa}(\tilde{A}_\nu)=\sum_{i=1}^n\kappa(\alpha_{h_i^{-1}}(A))\otimes M_{F_i}$ $=\sum_{i=1}^n\beta_{h_i^{-1}}(\kappa(A))\otimes M_{F_i}$ だから，同様にして $\tilde{\kappa}(\tilde{A}_\nu)\xrightarrow{s}\pi_\beta(\kappa(A))$ が示せる．よって $\tilde{\kappa}(\pi_\alpha(A))=\pi_\beta(\kappa(A))$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．他方，任意の $g\in G$ に対して，$\lambda_g\in\mathcal{U}(L^2(G))$ を $(\lambda_g f)(h)=f(g^{-1}h)$ で定めると，$\lambda(g)=I_{\mathfrak{N}}\otimes\lambda_g$ と書ける．よって $\tilde{\kappa}(\lambda(g))=I_{\mathfrak{M}}\otimes\lambda_g$ $(\forall g\in G)$．以上より，$\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G\subset\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$，$\mathfrak{M}\rtimes_\beta G\subset\mathfrak{M}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ であり，$\tilde{\kappa}$ が $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ から $\mathfrak{M}\rtimes_\beta G$ の上への＊同型写像であることがわかる．さらに，任意の $\gamma\in\hat{G}$ に対して，$\mu_\gamma\in\mathcal{U}(L^2(G))$ を $(\mu_\gamma f)(h)=\overline{\langle h,\gamma\rangle}f(h)$ で定めると，$\mu(\gamma)=I_{\mathfrak{N}}\otimes\mu_\gamma$ と書ける．したがって，任意の $X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ に対して，

$$\tilde{\kappa}(\hat{\alpha}_\gamma(X))=\tilde{\kappa}((I_{\mathfrak{N}}\otimes\mu_\gamma)X(I_{\mathfrak{N}}\otimes\mu_\gamma^*))$$

$$=(I_{\mathfrak{M}}\otimes\mu_\gamma)\tilde{\kappa}(X)(I_{\mathfrak{M}}\otimes\mu_\gamma^*)=\hat{\beta}_\gamma(\tilde{\kappa}(X)).\ \blacksquare$$

この定理より，接合積 $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ は $\mathfrak{N}$ を表現する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ によらず $*$ 同型の意味で一意に定まることがわかる．

さて，$\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ の双対作用 $\hat{\alpha}$ による接合積 $(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ がつくれる．これは $\mathcal{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(\hat{G})=\mathcal{H}\otimes L^2(G\times\hat{G})$ 上の v.N. 代数である．さらに，この上で $\hat{\alpha}$ に双対な $G=\hat{\hat{G}}$ の作用 $\hat{\hat{\alpha}}$ が定義できる．$\hat{\hat{\alpha}}$ を α の**第2双対作用**という．この節の目標であった Takesaki の双対定理は，次のように述べられる．ここで，$g\in G, \gamma\in\hat{G}$ に対して，$\lambda_g, \mu_\gamma\in\mathcal{U}(L^2(G))$ は〈定理 5.28〉の証明の中で定義したものである．

〈定理 5.29〉 Takesaki の双対定理：$(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ は $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ に $*$ 同型である．このとき，作用 $\hat{\hat{\alpha}}$ は $\tilde{\alpha}_g=\alpha_g\otimes\mathrm{Ad}(\lambda_g^*)$ $(g\in G)$ で定まる $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ 上の作用 $\tilde{\alpha}$ に変換される．

〈補題 5.26〉の結果として，$\mathfrak{N}$ の忠実な正規表現 $\{\mathcal{H}_1, \pi\}$ と G の $\mathcal{H}_1$ 上の連続なユニタリー表現 V が存在して $\pi(\alpha_g(A))=V_g\pi(A)V_g^*$ $(\forall A\in\mathfrak{N}, \forall g\in G)$ が成立することがわかる．この事実と〈定理 5.28〉より，G の $\mathcal{H}$ 上の τ^s–連続なユニタリー表現 V により $\alpha_g=\mathrm{Ad}(V_g)$ と書けるとして，〈定理 5.29〉を証明すればよい．このとき，$U\in\mathcal{U}(L^2(G,\mathcal{H}))$ を $(U\xi)(h)=V_h\xi(h)$ $(\xi\in L^2(G,\mathcal{H}))$ で定めると，

〈補題 5.30〉 $\mathrm{Ad}(U)$ により $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ は $\{A\otimes I, V_g\otimes\lambda_g\,;\, A\in\mathfrak{N}, g\in G\}''$ に $*$ 同型である．このとき，$\hat{\alpha}_\gamma=\mathrm{Ad}(I\otimes\mu_\gamma)$ はそのままの形に変換される．

証明 任意の $\xi\in L^2(G,\mathcal{H})$ に対して，$(U^*\xi)(h)=V_h^*\xi(h)$，$((A\otimes I)\xi)(h)=A\xi(h)$ より

$$(U^*(A\otimes I)U\xi)(h)=V_h^*AV_h\xi(h)=\alpha_{h^{-1}}(A)\xi(h)=(\pi_\alpha(A)\xi)(h).$$

よって $U\pi_\alpha(A)U^*=A\otimes I$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．また，$((V_g\otimes\lambda_g)\xi)(h)=V_g\xi(g^{-1}h)$ より

$$(U^*(V_g\otimes\lambda_g)U\xi)(h)=V_h^*V_g(U\xi)(g^{-1}h)=V_{h^{-1}g}V_{g^{-1}h}\xi(g^{-1}h)=(\lambda(g)\xi)(h).$$

よって $U\lambda(g)U^*=V_g\otimes\lambda_g$ $(\forall g\in G)$．さらに，$\mu(\gamma)=I\otimes\mu_\gamma$ であり，$U\mu(\gamma)U^*=\mu(\gamma)$ $(\forall\gamma\in\hat{G})$ も容易に示せる．$\blacksquare$

〈補題 5.31〉 (1) $\mathfrak{M}=\{\mu_\gamma\,;\,\gamma\in\hat{G}\}''$ は $L^2(G)$ 上の掛算作用素全体からなる極大可換な v.N. 代数に等しい.

(2) $\{\lambda_g,\mu_\gamma\,;\,g\in G,\gamma\in\hat{G}\}''=\boldsymbol{B}(L^2(G))$.

証明 (1)：$f\in L^\infty(G)$ による $L^2(G)$ 上の掛算作用素を M_f で書き，$\mathfrak{A}=M(L^\infty(G))\equiv\{M_f\,;\,f\in L^\infty(G)\}$ とおく．ここで，G が第2可算公理を満たすような場合は，Haar 測度が σ-有限であるから，〈定理 2.21〉(証明は 6.1 節で与える) より，$\mathfrak{A}$ は極大可換 (i.e., $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}'$) な v.N. 代数である．一般には，Haar 測度は必ずしも σ-有限とは限らないが，$(L^1(G))^*=L^\infty(G)$ が成立するので，やはり $\mathfrak{A}$ は極大可換な v.N. 代数となる (〈定理 2.21〉の註を参照)．次に，$\mathfrak{M}=\mathfrak{A}$ を示すために，$\varphi\in\mathfrak{A}_*$ で $\varphi(\mu_\gamma)=0$ $(\forall\gamma\in\hat{G})$ とする．〈系 4.8〉より，$\sum_{n=1}^\infty\|u_n\|^2<\infty$，$\sum_{n=1}^\infty\|v_n\|^2<\infty$ である列 $\{u_n\},\{v_n\}\subset L^2(G)$ が存在して $\varphi(A)=\sum_{n=1}^\infty\langle u_n,Av_n\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{A})$．$w(h)=\sum_{n=1}^\infty\overline{u_n(h)}v_n(h)$ とおくと，$w\in L^1(G)$ であり $\int_G\overline{\langle h,\gamma\rangle}w(h)\,dh=\varphi(\mu_\gamma)=0$ $(\forall\gamma\in\hat{G})$．Fourier 変換の単射性より，$w=0$．よって $\varphi(M_f)=\int_G f(h)w(h)\,dh=0$ $(\forall f\in L^\infty(G))$ となり，$\varphi=0$．したがって $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}$ を得る．

(2)：$A\in\{\lambda_g,\mu_\gamma\,;\,g\in G,\gamma\in\hat{G}\}'$ とすると，(1) より $A\in\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}$．よって $f\in L^\infty(G)$ が存在して $A=M_f$．任意の $g\in G$ に対して，$M_f=\lambda_gM_f\lambda_g{}^*$ より $f(h)=f(g^{-1}h)$ a.e. これより f は a.e. で定数であることがわかり，$A\in\boldsymbol{C}I$. ▮

〈定理 5.29〉の証明　4段階に分けて証明しよう．

第1段：$(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ は $\mathscr{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(\hat{G})$ 上の

$$\mathfrak{N}_1=\{A\otimes I\otimes I,\,V_g\otimes\lambda_g\otimes I,\,I\otimes\mu_\gamma\otimes\lambda_\gamma\,;\,A\in\mathfrak{N},g\in G,\gamma\in\hat{G}\}''$$

に＊同型であり，このとき $\hat{\alpha}_g=\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\mu_g)$ はそのままの形に変換されることを示す．$\hat{\alpha}$ に〈補題 5.30〉を適用すれば，$(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ は $\mathfrak{N}_0=\{X\otimes I,\,I\otimes\mu_\gamma\otimes\lambda_\gamma\,;\,X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G,\gamma\in\hat{G}\}''$ に＊同型である．同じく〈補題 5.30〉より，$U(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)U^*=\{A\otimes I,\,V_g\otimes\lambda_g\,;\,A\in\mathfrak{N},g\in G\}''$．$I\otimes\mu_\gamma$ が U と可換だから，

$$\begin{aligned}(U\otimes I)\mathfrak{N}_0(U^*\otimes I)&=\{(UXU^*)\otimes I,\,I\otimes\mu_\gamma\otimes\lambda_\gamma\,;\,X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G,\gamma\in\hat{G}\}''\\&=\{A\otimes I\otimes I,\,V_g\otimes\lambda_g\otimes I,\,I\otimes\mu_\gamma\otimes\lambda_\gamma\,;\,A\in\mathfrak{N},g\in G,\gamma\in\hat{G}\}''.\end{aligned}$$

このとき，$I\otimes I\otimes\mu_g$ が $U\otimes I$ と可換だから，$\hat{\alpha}_g$ はそのままの形に変換される．

第2段：$\mathfrak{N}_1$ は $\mathscr{H}\otimes L^2(G)\otimes L^2(G)$ 上の

$$\mathfrak{N}_2=\{A\otimes I\otimes I,\,V_g\otimes\lambda_g\otimes I,\,I\otimes\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma\,;\,A\in\mathfrak{N},g\in G,\gamma\in\hat{G}\}''$$

に＊同型であり，このとき $\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\mu_g)$ は $\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\lambda_g{}^*)$ に変換されることを示す．Fourier 変換 $\mathscr{F}:L^2(\hat{G})\to L^2(G)$ はユニタリー作用素であり，任意の $f\in L^1(\hat{G})\cap L^2(\hat{G})$ に対して，

$$(\mathscr{F}\lambda_\gamma f)(h)=\int_{\hat{G}}\overline{\langle h,p\rangle}(\lambda_\gamma f)(p)\,dp=\int_{\hat{G}}\overline{\langle h,p\rangle}f(\gamma^{-1}p)\,dp$$

$$=\int_{\hat{G}}\overline{\langle h,\gamma p\rangle}f(p)\,dp=\overline{\langle h,\gamma\rangle}(\mathcal{F}f)(h)=(\mu_\gamma\mathcal{F}f)(h).$$

よって $\mathcal{F}\lambda_\gamma\mathcal{F}^*=\mu_\gamma$ $(\forall\gamma\in\hat{G})$ となり，$(I\otimes I\otimes\mathcal{F})\mathfrak{R}_1(I\otimes I\otimes\mathcal{F}^*)=\mathfrak{R}_2$．さらに，$f\in L^1(\hat{G})\cap L^2(\hat{G})$ に対して，

$$(\mathcal{F}\mu_g f)(h)=\int_{\hat{G}}\overline{\langle h,p\rangle}(\mu_g f)(p)\,dp=\int_{\hat{G}}\overline{\langle h,p\rangle}\,\overline{\langle g,p\rangle}f(p)\,dp$$
$$=\int\overline{\langle hg,p\rangle}f(p)\,dp=(\mathcal{F}f)(hg)=(\lambda_g{}^*\mathcal{F}f)(h).$$

よって $\mathcal{F}\mu_g\mathcal{F}^*=\lambda_g{}^*$ $(\forall g\in G)$ となり，$\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\mu_g)$ は $\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\lambda_g{}^*)$ に変換される．

第3段：$\mathfrak{R}_2$ は $\mathcal{H}\otimes L^2(G)$ 上の

$$\mathfrak{R}_3=\{A\otimes I,\ V_g\otimes\lambda_g,\ I\otimes\mu_\gamma\ ;\ A\in\mathfrak{R},\ g\in G,\ \gamma\in\hat{G}\}''$$

に＊同型であり，このとき $\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\lambda_g{}^*)$ は $\mathrm{Ad}(I\otimes\lambda_g{}^*)$ に変換されることを示す．$L^2(G\times G)$ 上の作用素 W を $(Wf)(s,t)=f(st,t)$ $(f\in L^2(G\times G))$ で定めると，W は等距離作用素であり $(W^{-1}f)(s,t)=f(st^{-1},t)$．よって $W\in\mathcal{U}(L^2(G\times G))$．$L^2(G)\otimes L^2(G)=L^2(G\times G)$ と同一視すると，$\lambda_g\otimes I$ と $\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma$ は $L^2(G\times G)$ 上で次のように書ける：

$$((\lambda_g\otimes I)f)(s,t)=f(g^{-1}s,t),$$
$$((\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma)f)(s,t)=\overline{\langle s,\gamma\rangle}\,\overline{\langle t,\gamma\rangle}f(s,t).$$

よって

$$(W^*(\lambda_g\otimes I)Wf)(s,t)=((\lambda_g\otimes I)Wf)(st^{-1},t)=(Wf)(g^{-1}st^{-1},t)$$
$$=f(g^{-1}s,t)=((\lambda_g\otimes I)f)(s,t),$$
$$(W^*(\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma)Wf)(s,t)=((\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma)Wf)(st^{-1},t)$$
$$=\overline{\langle st^{-1},\gamma\rangle}\,\overline{\langle t,\gamma\rangle}(Wf)(st^{-1},t)$$
$$=\overline{\langle s,\gamma\rangle}f(s,t)=((\mu_\gamma\otimes I)f)(s,t)$$

であるから，$W^*(\lambda_g\otimes I)W=\lambda_g\otimes I,\ W^*(\mu_\gamma\otimes\mu_\gamma)W=\mu_\gamma\otimes I$ が成立する．したがって $(I\otimes W^*)\mathfrak{R}_2(I\otimes W)=\mathfrak{R}_3\otimes CI$．さらに，

$$(W^*(I\otimes\lambda_g{}^*)Wf)(s,t)=((I\otimes\lambda_g{}^*)Wf)(st^{-1},t)=(Wf)(st^{-1},tg)$$
$$=f(sg,tg)=((\lambda_g{}^*\otimes\lambda_g{}^*)f)(s,t)$$

であるから，$(I\otimes W^*)(I\otimes I\otimes\lambda_g{}^*)(I\otimes W)=I\otimes\lambda_g{}^*\otimes\lambda_g{}^*$．よって $\mathrm{Ad}(I\otimes I\otimes\lambda_g{}^*)$ は $\mathfrak{R}_3\otimes CI$ 上の $\mathrm{Ad}(I\otimes\lambda_g{}^*\otimes\lambda_g{}^*)$ に変換される．$\mathfrak{R}_3\otimes CI\simeq\mathfrak{R}_3$ より，第3段が示せた．

第4段：$\mathfrak{R}_3$ は $\mathfrak{R}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))$ に＊同型であり，このとき $\mathrm{Ad}(I\otimes\lambda_g{}^*)$ は $\tilde{\alpha}_g$ に変換されることを示す．〈補題 5.30〉の証明より，任意の $A\in\mathfrak{R},\ g\in G$ に対して $U^*(A\otimes I)U=\pi_\alpha(A)$，$U^*(V_g\otimes\lambda_g)U=\lambda(g)=I\otimes\lambda_g$．よって $U^*(\mathfrak{R}\otimes CI)U=\pi_\alpha(\mathfrak{R})$．$\mathfrak{M}=\{\mu_\gamma\ ;\ \gamma\in\hat{G}\}''$ とおくと，〈補題 5.27〉の（1）より $\pi_\alpha(\mathfrak{R})\subset(CI\otimes\mathfrak{M})'$．また，〈定理 5.28〉の証明より $\pi_\alpha(\mathfrak{R})\subset\mathfrak{R}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))=(\mathfrak{R}'\otimes CI)'$．よって，〈定理 4.30〉と〈補題 5.31〉の（1）より，

$$\pi_\alpha(\mathfrak{R})\subset(\mathfrak{R}'\otimes CI)'\cap(CI\otimes\mathfrak{M})'=(\mathfrak{R}'\otimes\mathfrak{M})'=\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{M}.$$

さらに，$I\otimes\mu_\gamma$ が U と可換だから，$U^*(CI\otimes\mathfrak{M})U=CI\otimes\mathfrak{M}$．したがって $U^*(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{M})U$

$\subset \mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ が成立する．逆に，

$$U(\mathfrak{N}\otimes \boldsymbol{C}I)U^* \subset (\mathfrak{N}'\otimes \boldsymbol{C}I)' \cap (\boldsymbol{C}I\otimes\mathfrak{M})' = \mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$$

が容易にわかり，$U(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})U^* \subset \mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ も成立する．よって $U^*(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})U = \mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}$ となり，

$$\begin{aligned} U^*\mathfrak{N}_3 U &= U^*((\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}) \cap \{V_g\otimes\lambda_g\,;\ g\in G\})''U \\ &= ((\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M}) \cup \{I\otimes\lambda_g\,;\ g\in G\})'' \\ &= \mathfrak{N}\otimes(\mathfrak{M}\cup\{\lambda_g\,;\ g\in G\})'' = \mathfrak{N}\otimes \boldsymbol{B}(L^2(G)). \end{aligned}$$

上の最後の等式で，〈補題 5. 31〉の（2）を使った．さらに，

$$\begin{aligned} (U^*(I\otimes\lambda_g{}^*)U\xi)(h) &= V_h{}^*((I\otimes\lambda_g{}^*)U\xi)(h) = V_h{}^*(U\xi)(hg) \\ &= V_h{}^*V_{hg}\xi(hg) = V_g\xi(hg) = ((V_g\otimes\lambda_g{}^*)\xi)(h) \end{aligned}$$

であるから，$U^*(I\otimes\lambda_g{}^*)U = V_g\otimes\lambda_g{}^*$．よって $\mathrm{Ad}(I\otimes\lambda_g{}^*)$ は $\mathrm{Ad}(V_g\otimes\lambda_g{}^*) = \tilde{\alpha}_g$ に変換される．

これで〈定理 5. 29〉の証明が終わった．▌

註 特に $\mathfrak{N}$ が固有無限で G が第 2 可算公理を満たす（ゆえに $L^2(G)$ が可分）とき，〈定理 4. 56〉より $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G)) \simeq \mathfrak{N}$ だから，$(\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ は完全にもとの $\mathfrak{N}$ に＊同型である．

〈定理 5.32〉 （1） $\pi_\alpha(\mathfrak{N}) = \{X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G\,;\ \hat{\alpha}_\gamma(X) = X,\ \forall\gamma\in\hat{G}\}$．

（2） $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G = \{X\in\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))\,;\ \tilde{\alpha}_g(X) = X,\ \forall g\in G\}$．

証明 〈定理 5. 29〉の証明と同じく，τ^s-連続なユニタリー表現 V により $\alpha_g = \mathrm{Ad}(V_g)$ と書けると仮定してよい．

（1）：$\hat{\alpha}_\gamma(\pi_\alpha(A)) = \pi_\alpha(A)$ （$\forall A\in\mathfrak{N}$）は，〈補題 5. 27〉の（1）より明らか．

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha(A)(V_g\otimes\lambda_g{}^*)\xi)(h) &= \alpha_{h^{-1}}(A)V_g\xi(hg) = V_g\alpha_{(hg)^{-1}}(A)\xi(hg) \\ &= ((V_g\otimes\lambda_g{}^*)\pi_\alpha(A)\xi)(h) \end{aligned}$$

であるから，$\pi_\alpha(A)$ は $V_g\otimes\lambda_g{}^*$ と可換である．また，$I\otimes\lambda_h$ も $V_g\otimes\lambda_g{}^*$ と可換である．よって $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G \subset \{V_g\otimes\lambda_g{}^*\,;\ g\in G\}'$ が成立する．さて，$X\in\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$, $\hat{\alpha}_\gamma(X) = X$ （$\forall\gamma\in\hat{G}$）とすると，

$$X\in(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G))) \cap \{V_g\otimes\lambda_g{}^*,\ I\otimes\mu_\gamma\,;\ g\in G, \gamma\in\hat{G}\}'.$$

$V_g\otimes\lambda_g{}^* = U^*(I\otimes\lambda_g{}^*)U$, $I\otimes\mu_\gamma = U^*(I\otimes\mu_\gamma)U$ より，

$$\begin{aligned} \{V_g\otimes\lambda_g{}^*,\ I\otimes\mu_\gamma\,;\ g\in G, \gamma\in\hat{G}\}'' &= U^*(\boldsymbol{C}I\otimes\{\lambda_g{}^*, \mu_\gamma\,;\ g\in G, \gamma\in\hat{G}\}'')U \\ &= U^*(\boldsymbol{C}I\otimes\boldsymbol{B}(L^2(G)))U. \end{aligned}$$

よって $X\in(\mathfrak{N}'\otimes\boldsymbol{C}I)' \cap U^*(\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\otimes\boldsymbol{C}I)U$．したがって，ある $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で $X = U^*(A\otimes I)U$ と書けて，任意の $A'\in\mathfrak{N}'$ と連続な $\xi\in L^2(G,\mathcal{H})$ に対して，$[A, A']\xi(e) = ([U^*(A\otimes I)U, A'\otimes I]\xi)(e) = 0$．これより，$[A, A'] = 0$ （$\forall A'\in\mathfrak{N}'$）となり $A\in\mathfrak{N}$．よって $X = U^*(A\otimes I)U = \pi_\alpha(A) \in \pi_\alpha(\mathfrak{N})$．

（2）：（1）の等式を $\hat{\alpha}$ に適用すれば，

$$\pi_{\hat{\alpha}}(\mathfrak{N}\rtimes_{\alpha}G)=\{X\in(\mathfrak{N}\rtimes_{\alpha}G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}\ ;\ \hat{\hat{\alpha}}_{g}(X)=X,\ \forall g\in G\}.$$

〈定理 5.29〉で与えた $(\mathfrak{N}\rtimes_{\alpha}G)\rtimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ から $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^{2}(G))$ への＊同型写像により，部分代数 $\pi_{\hat{\alpha}}(\mathfrak{N}\rtimes_{\alpha}G)$ が $\mathfrak{N}\rtimes_{\alpha}G$ に写されることは容易にわかる．また，$\hat{\alpha}$ が $\tilde{\alpha}$ に変換されるから，（2）の等式を得る．▌

第6章　非可換確率論

量子力学における確率の概念は，古典力学におけるそれとは異なり，力学系の存在の仕方それ自体と係わっており，けっして人間の無知さ，測定の不精確さのみに依存しているものではない．この章では，量子系の確率の数学的基礎づけについて論じる．この量子系の確率論を非可換確率論と呼び，以下**NPT** (noncommutative probability theory) と略し，これに対応して，通常の確率論を**CPT** (commutative probability theory) と略する．6.1節で，CPTの定式化を念頭において，NPTの定式化について論じる．このNPTの定式化の下で，6.2節ではRadon–Nikodymの定理を，6.3節では条件付期待値とその延長線上にある完全正写像を議論する．さらに6.4節で，エルゴード定理とマルチンゲール収束定理を説明する．また，最後の6.5節で，数理統計学において重要な役割を果たしている十分性の概念をNPTへ拡張し，この概念を使って量子系の状態の分類を試みる．このNPTは，Dye–Segalの非可換積分論を基にして，1952〜1960年代初頭の間Umegakiが提唱した．

総じてこの章の議論は，力学系の不確定さ，混沌さを記述する各種のエントロピーなど，ひろく物理的な概念と関連があるが，ここでは紙数の都合により，これらの話題は割愛した（文献[29]参照）．

6.1　非可換確率論の定式化

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とし，その上の確率測度の全体を $\boldsymbol{P}(\Omega)$ で表す．$\mu\in\boldsymbol{P}(\Omega)$ とすると，CPTは確率測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と Ω 上の確率変数 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ (i.e., 任意のBorel集合 $B\in\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ に対して $f^{-1}(B)\in\mathcal{F}$) によって記述される．例えば，確率変数 f の期待値 $E_\mu(f)=\int_\Omega f\,d\mu$ と分散 $V_\mu(f)=E_\mu(f^2)-E_\mu(f)^2$ は重要である．

ところで，任意の測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において，Hilbert空間 $L^2=L^2(\Omega)$ をつくると，各 $f\in L^\infty=L^\infty(\Omega)$ に掛算作用素 $M_f\in\boldsymbol{B}(L^2)$ が対応する．$M(L^\infty)$

$\equiv\{M_f\,;\,f\in L^\infty\}$ とおくと，$M(L^\infty)$ は $\boldsymbol{B}(L^2)$ の可換な$*$部分代数である．〈定理 2.21〉で述べたように，$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ が σ-有限のとき，$M(L^\infty)$ は極大可換な v.N. 代数となる．これの証明を次に与える．まず，ひとつの補題を用意する．

〈**補題 6.1**〉 $\mathfrak{N}$ が可換 v.N. 代数のとき，$\mathfrak{N}$ に関する巡回ベクトルが存在するならば，$\mathfrak{N}$ は極大可換 (i.e., $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'$) である．

証明 5.2節の結果を使って示そう（直接の証明も容易である）．$x_0\in\mathcal{H}$ が $\mathfrak{N}$ に関する巡回ベクトルとすると，$\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}'$ より $\{\mathfrak{N}'x_0\}^-=\mathcal{H}$ となり，x_0 は $\mathfrak{N}$ に関する分離ベクトルでもある．この x_0 に関する $\mathfrak{N}$ のモジュラー共役作用素 J をとると，$\mathfrak{N}$ が可換だから，$\|SAx_0\|=\|A^*x_0\|=\|Ax_0\|$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．よって〈定理 5.16〉の（4）より，$J=S$ を得る．したがって，任意の $A,B\in\mathfrak{N}$ に対して，$JAJBx_0=JAB^*x_0=BA^*x_0=A^*Bx_0$ となり，$JAJ=A^*$．ゆえに Tomita の基本定理より，$\mathfrak{N}'=J\mathfrak{N}J=\mathfrak{N}$．∎

〈**定理 2.21**〉**の証明** $\mathfrak{N}=M(L^\infty)$ とおく．μ が σ-有限だから，$x_0\in L^2(\Omega)$ が存在して $x_0(\omega)>0$ $(\forall\omega\in\Omega)$．この x_0 が $\mathfrak{N}$ に関する巡回ベクトルになることはすぐにわかる．したがって〈補題 6.1〉より，$\mathfrak{N}$ が v.N. 代数であることを示せばよい．Riesz の定理より $(L^1)^*=L^\infty$ だから，Banach-Alaoglu の定理より，$(L^\infty)_1\equiv\{f\in L^\infty\,;\,\|f\|_\infty\leqq1\}$ は弱$*$コンパクトである．また，$f\in L^\infty\longmapsto M_f\in\mathfrak{N}$ は等距離$*$同型写像であるから，$\mathfrak{N}_1=\{M_f\,;\,f\in(L^\infty)_1\}$ となる．任意の $x,y\in L^2$ に対して，$\bar{x}y\in L^1$ であり，$\langle x,M_fy\rangle=\int_\Omega f\bar{x}y\,d\mu$ $(\forall f\in L^\infty)$．よって，$f\longmapsto M_f$ は $(L^\infty$, 弱$*$位相$)$ から $(\mathfrak{N},\tau^w)$ への連続写像（実は位相同型写像）となるから，$\mathfrak{N}_1$ は τ^w（ゆえに τ^{uw})-コンパクトである．したがって〈定理 4.23〉より，$\mathfrak{N}$ は v.N. 代数である．∎

$M(L^\infty)$ に属する射影作用素は $\mathcal{F}$ の元の定義函数による掛算作用素であるから，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{P}(M(L^\infty))$ は自然に同一視できる．さらに，$\mu\in\boldsymbol{P}(\Omega)$ のとき，$\varphi(M_f)=\int_\Omega f\,d\mu=\langle1,M_f1\rangle$ $(f\in L^\infty)$ により，$\mathfrak{N}$ 上のベクトル状態 φ が定まる．したがって，確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ は，可換 v.N. 代数 $M(L^\infty)$ を用いて，3つ組 $(L^2,\mathcal{P}(M(L^\infty)),\varphi)$ によって記述できる．以下，$f\in L^\infty$ と $M_f\in M(L^\infty)$ を同一視して，$M(L^\infty)$ を単に L^∞ で表す．

なお，通常考察の対象となる集合 Ω は位相空間であることが多い．特に，次の空間が重要である：（1）完全正則空間；（2）局所コンパクト Hausdorff 空間；（3）コンパクト Hausdorff 空間．ここで，（3）⇒（2）⇒（1）であるが，（1）と（2）の空間は必ずコンパクト化できるので，以下（3）の場合で話を進める．コンパクト Hausdorff 空間 Ω の Borel 集合体を $\mathcal{B}(\Omega)$ で，Ω 上の正則

な Borel 測度の全体を $M(\Omega)_+$ で表すと，Riesz–Markov–Kakutani の定理より，$C(\Omega)_+^*$ と $M(\Omega)_+$ の間には次のような対応がある： 任意の $\varphi\in C(\Omega)_+^*$ に対して，$\mu\in M(\Omega)_+$ が一意に存在して $\varphi(f)=\int_\Omega f\,d\mu$ $(\forall f\in C(\Omega))$.

〈定理 6.2〉 $\varphi\in C(\Omega)_+^*$ とこれに対応する $\mu\in M(\Omega)_+$ に対して，φ による $C(\Omega)$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ は,

$$\mathcal{H}_\varphi=L^2(\Omega,\mu),\quad \pi_\varphi(f)=M_f\quad (f\in C(\Omega)),\quad x_\varphi=1$$

で与えられる．このとき，$\pi_\varphi(C(\Omega))''=L^\infty(\Omega,\mu)$.

証明 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ を上のように与えると，$\{\pi_\varphi(C(\Omega))x_\varphi\}^-=\{C(\Omega)\}^-=\mathcal{H}_\varphi$ かつ $\varphi(f)=\int_\Omega f\,d\mu=\langle x_\varphi, \pi_\varphi(f)x_\varphi\rangle$ $(\forall f\in C(\Omega))$. よって〈定理 3.34〉より，$\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ は φ による $C(\Omega)$ の GNS 表現である．このとき，$\pi_\varphi(C(\Omega))''$ は巡回ベクトル x_φ をもつ可換 v. N. 代数であるから，〈補題 6.1〉より極大可換となる．ところで，〈定理 2.21〉より $L^\infty(\Omega,\mu)$ は v. N. 代数であるから，$\pi_\varphi(C(\Omega))''\subset L^\infty(\Omega,\mu)$. ゆえに $\pi_\varphi(C(\Omega))''=L^\infty(\Omega,\mu)$. ▌

さて，可換 C* 代数 $\mathcal{A}(\ni I)$ に対しては，Gelfand–Naimark の表現定理より，コンパクト Hausdorff 空間（スペクトル空間）Ω が存在して，$\mathcal{A}$ は $C(\Omega)$ に等距離 * 同型である．可換 v. N. 代数の場合には，さらに次が成立する．

〈定理 6.3〉 $\mathfrak{N}$ が σ–有限な可換 v. N. 代数のとき，コンパクト Hausdorff 空間 Ω と $\mu\in M(\Omega)_+$ が存在して，$\mathfrak{N}$ は $L^\infty(\Omega,\mu)$ に等距離 * 同型である．

証明 コンパクト Hausdorff 空間 Ω が存在して $\mathfrak{N}\simeq C(\Omega)$. $\mathfrak{N}$ が σ–有限だから，〈定理 4.46〉より $\mathfrak{N}$ は忠実な正規状態 φ をもつ．φ による $\mathfrak{N}(\simeq C(\Omega))$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi\}$ は，φ を $C(\Omega)$ 上に移して構成することができる．したがって，φ に対応する $\mu\in M(\Omega)_+$ をとると，〈定理 6.2〉より π_φ は $\mathcal{H}_\varphi=L^2(\Omega,\mu)$ 上の表現となり，$\pi_\varphi(\mathfrak{N})''=L^\infty(\Omega,\mu)$. ところで，$\pi_\varphi$ は忠実な正規表現となり $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ は v. N. 代数となる（4.5 節末の 3° 参照）から，$\mathfrak{N}\simeq\pi_\varphi(\mathfrak{N})=\pi_\varphi(\mathfrak{N})''=L^\infty(\Omega,\mu)$. ▌

以上の結果を考慮すると，NPT を次のように定式化するのは自然であろう．

（1） **v. N. 代数による定式化**：CPT における $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ に対応するものとして，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の全体 $\mathcal{P}$，ベクトル状態 φ をとり，確率変数には $\mathcal{H}$ 上の作用素を対応させるのが適当と思われるが，ここでは少々一般化して（ただし有界作用素のみを考えて），NPT を 4 つ組 $(\mathcal{H}, \mathfrak{N}, \mathcal{P}(\mathfrak{N}), \varphi)$ で記述する．ここで，$\mathfrak{N}$ は $\mathcal{H}$ 上の v. N. 代数，$\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ は $\mathfrak{N}$ に属する射影

作用素の全体，φ は $\mathfrak{N}$ 上の正規状態である．

（2） **C* 代数による定式化**：v.N. 代数による記述をさらに一般化して，下敷になっている空間 $\mathcal{H}$ は陽に考えず，C* 代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 $\varphi\in\mathfrak{S}$ の組 $(\mathcal{A},\varphi)$ で NPT を記述することもできる．このとき，φ を固定すれば，φ による GNS 表現をとることによって，（1）の4つ組 $(\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi(\mathcal{A})'',\mathcal{P}(\pi_\varphi(\mathcal{A})''),\tilde{\varphi})$ が得られる．ただし，$\tilde{\varphi}$ は φ の $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ への自然な拡張である．この C* 代数による記述は，$\mathcal{A}$ の包絡 v.N. 代数 $\mathcal{A}''=(\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\pi_\varphi)(\mathcal{A})''$ をとれば，（1）の記述に帰着させることができる．すなわち，任意の $\varphi\in\mathfrak{S}$ は $\mathcal{A}''$ 上の正規状態 $\tilde{\varphi}$ に拡張されるので，4つ組 $(\mathcal{H}=\bigoplus_{\varphi\in\mathfrak{S}}\mathcal{H}_\varphi,\mathcal{A}'',\mathcal{P}(\mathcal{A}''),\tilde{\varphi})$ を考えればよい．以下では，主に（1）の立場で NPT を考えていくことにするが，（2）の立場をとることもある．最後に，CPT と NPT の比較を表示しておこう（表 6.1）．

表 6.1

CPT	NPT
Ω	$\mathcal{H}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{P}(\mathfrak{N})$
$\mu\in\boldsymbol{P}(\Omega)$	$\varphi\in\mathfrak{S}$（正規状態）
$A,B\in\mathcal{F}$ に対して	$E,F\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して
$A\subset B$	$E\leqq F$
$A\cup B$	$E\vee F$
$A\cap B$	$E\wedge F$
$A^c=\Omega\backslash A$	$E^\perp=I-E$

6.2 Radon-Nikodym の定理と Connes コサイクル

Radon–Nikodym の定理（1.6 節 6° 参照）は CPT において基本的な役割を果たしているが，NPT においても，まずこの Radon–Nikodym の定理（以下，RN 定理と書く）を定式化することが問題になる．

〈定理 3.36〉は C* 代数上の状態に対する RN 定理である．この定理は，GNS 表現でつくられる v.N. 代数 $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ 上への φ,ψ の拡張を考えれば，v.N. 代数上の RN 定理とみなせる．こうして，C* 代数上の RN 定理は，GNS 表現あるいは包絡 v.N. 代数を考えることによって，v.N. 代数上の RN 定理に帰着させることができる．したがって，この節では，v.N. 代数 $\mathfrak{N}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の正の正規汎函数に対する RN 定理を議論する．

$\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ において，ψ が **φ-絶対連続**とは，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して $\varphi(A^*A)=0$ ならば $\psi(A^*A)=0$ であるときをいう．このとき，$\psi\ll\varphi$ と書く．$\mathcal{H}$ 上の閉作用素 T が $\mathfrak{N}$ に**付随的**であるとは，任意の $U'\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}')$ に対して

$U'TU'^*=T$ であるときをいう．このとき，$T\eta\mathfrak{N}$ と書く．自己共役な T に対しては，$T\eta\mathfrak{N}$ であることは，T のスペクトル分解 $T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$ において $\{E_\lambda\}\subset\mathfrak{N}$ であることと同値である．以下で議論する RN 定理は，次のように述べることができる．『$\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\psi\ll\varphi$ ならば，$\mathcal{H}$ 上の正の自己共役作用素 T が存在して ψ を φ と T によって表すことができるか．』ここで，作用素 T は必ずしも有界とは限らないが，$T\eta\mathfrak{N}$ であることが望ましい．

上で述べた RN 定理は，まず Dye と Segal によって φ が有限または半有限な正規トレースの場合で証明されて以来，種々の拡張がなされている．そこでまず，Dye と Segal の結果を証明なしで簡単に説明しておこう．τ を $\mathfrak{N}$ の忠実な半有限正規トレースとする(ゆえに $\mathfrak{N}$ は半有限である)．このとき，$\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\tau(|A|)<\infty\}$ は $\mathfrak{N}$ の両側イデアルであり，この上で $\|A\|_1=\tau(|A|)$ とおくと，$\|\cdot\|_1$ はノルムを与える．$\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\tau(|A|)<\infty\}$ をこのノルム $\|\cdot\|_1$ で完備化した Banach 空間を $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ で表す．任意の $T\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ は稠密な定義域をもち $T\eta\mathfrak{N}$ である閉作用素 T として実現される．τ は $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ 上の線形汎函数として一意に拡張される．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $T\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$AT, TA\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ であり，$\|AT\|_1$, $\|TA\|_1\leqq\|A\|\,\|T\|_1$ かつ $\tau(AT)=\tau(TA)$ が成立する．ところで，$p>1$ に対しても，稠密な定義域をもつ閉作用素 $T\eta\mathfrak{N}$ で $|T|^p\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ となるものの全体を $L^p(\mathfrak{N},\tau)$ で表す．$L^p(\mathfrak{N},\tau)$ はノルム $\|T\|_p=\tau(|T|^p)^{1/p}$ により Banach 空間になる．また，$L^\infty(\mathfrak{N},\tau)=\mathfrak{N}$ とする．この $L^p(\mathfrak{N},\tau)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ は通常の測度空間上の L^p 空間と非常に似た性質をもつことが示される．例えば，$S, T\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ ならば $S^*T\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ であり，内積 $\langle S,T\rangle=\tau(S^*T)$ により $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ は Hilbert 空間になる．

〈定理 6.4〉 任意の $T\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$\psi(A)=\tau(TA)$ $(A\in\mathfrak{N})$ により $\psi\in\mathfrak{N}_*$ が定まる．逆に，任意の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$T\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が一意に存在して $\psi(A)=\tau(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ かつ $\|\psi\|=\|T\|_1$．ここで，$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ ならば，T は正の自己共役作用素となる．

この Dye-Segal の RN 定理は $L^1(\mathfrak{N},\tau)=\mathfrak{N}_*$ (Banach 空間として)を意味している．したがって，$L^1(\mathfrak{N},\tau)^*=\mathfrak{N}$ となる．特に，$\mathfrak{N}=\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$, $\tau=\mathrm{tr}$ の場合，$L^1(\mathfrak{N},

$\tau)=\boldsymbol{T}(\mathscr{H})$, $L^2(\mathfrak{R},\tau)=\boldsymbol{S}(\mathscr{H})$ で，〈定理 2.18〉の $\boldsymbol{T}(\mathscr{H})^*=\boldsymbol{B}(\mathscr{H})$ がいえる．

$\varphi,\psi\in\mathfrak{R}_{*,+}$ に対して，$\psi\ll\varphi$ よりも強い条件 $\psi\leqq\varphi$ (i.e., $\varphi-\psi\in\mathfrak{R}_{*,+}$) を仮定した場合の RN 定理を2つ与えよう．これらは Sakai によって証明された．以下，$Q\in\mathfrak{R}$ に対して，$(\mathrm{R}_Q\varphi)(A)=\varphi(AQ)$ $(A\in\mathfrak{R})$ と定める．

〈補題 6.5〉 $\varphi\in\mathfrak{R}_{*,+}$, $Q\in\mathfrak{R}$ のとき，$\mathrm{R}_Q\varphi$ が正ならば $\mathrm{R}_Q\varphi\leqq\|Q\|\varphi$.

証明 任意の $A\in\mathfrak{R}_+$ に対して，

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}_{Q^2}\varphi)(A)&=\varphi(AQ^2)=(\mathrm{R}_Q\varphi)(AQ)=\overline{(\mathrm{R}_Q\varphi)(Q^*A)}\\&=\overline{\varphi(Q^*AQ)}=\varphi(Q^*AQ)\geqq 0\end{aligned}$$

となるから，$\mathrm{R}_{Q^2}\varphi$ も正であり，Schwarz の不等式より

$$(\mathrm{R}_Q\varphi)(A)=\varphi(A^{1/2}A^{1/2}Q)\leqq\varphi(Q^*AQ)^{1/2}\varphi(A)^{1/2}=(\mathrm{R}_{Q^2}\varphi)(A)^{1/2}\varphi(A)^{1/2}.$$

この議論を $\mathrm{R}_{Q^{2^n}}\varphi$ $(n=1,2,\cdots)$ にくり返すと，

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}_Q\varphi)(A)&\leqq(\mathrm{R}_{Q^{2^n}}\varphi)(A)^{1/2^n}\varphi(A)^{1/2+\cdots+1/2^n}\\&\leqq\|\varphi\|^{1/2^n}\|A\|^{1/2^n}\|Q\|\varphi(A)^{1/2+\cdots+1/2^n}.\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすれば，$(\mathrm{R}_Q\varphi)(A)\leqq\|Q\|\varphi(A)$ $(\forall A\in\mathfrak{R}_+)$ を得る．▌

〈定理 6.6〉 $\varphi,\psi\in\mathfrak{R}_{*,+}$, $\psi\leqq\varphi$ ならば，$0\leqq T\leqq I$, $\mathrm{s}(T)\leqq\mathrm{s}(\varphi)$ である $T\in\mathfrak{R}$ が一意に存在して $\psi(A)=\varphi(TAT)$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$.

証明 φ,ψ を $\mathrm{s}(\varphi)\mathfrak{R}\mathrm{s}(\varphi)$ 上に制限して考えればよいから，$\mathrm{s}(\varphi)=I$ つまり φ が忠実であるとしてよい．このとき，φ による $\mathfrak{R}$ の GNS 表現 $\{\mathscr{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ をとれば，π_φ は忠実であり，x_φ は $\pi_\varphi(\mathfrak{R})$ に関する巡回かつ分離ベクトルである（〈定理 4.46〉参照）．したがって，巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathscr{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0,Ax_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$ と書けるとして一般性を失わない．このとき，〈定理 3.36〉より，$T'\in\mathfrak{R}'$, $0\leqq T'\leqq I$ が存在して $\psi(A)=\langle T'x_0,AT'x_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$．いま，$\varphi',\psi'\in\mathfrak{R}'_*$ を $\varphi'(A')=\langle x_0,A'x_0\rangle$, $\psi'(A')=\langle x_0,A'T'x_0\rangle$ $(A'\in\mathfrak{R}')$ と定める．ψ' の極分解 $\psi'=\mathrm{R}_{V'}|\psi'|$（〈定理 4.18〉参照）をとると，

$$|\psi'|=\mathrm{R}_{V'^*}\psi'=\mathrm{R}_{V'^*}\mathrm{R}_{T'}\varphi'=\mathrm{R}_{V'^*T'}\varphi'.$$

よって〈補題 6.5〉より，$|\psi'|\leqq\|V'^*T'\|\varphi'\leqq\varphi'$．再び〈定理 3.36〉より，$T\in\mathfrak{R}$, $0\leqq T\leqq I$ が存在して $|\psi'|(A')=\langle x_0,A'Tx_0\rangle$ $(\forall A'\in\mathfrak{R}')$．ところで，

$$\langle A'x_0,Tx_0\rangle=|\psi'|(A'^*)=(\mathrm{R}_{V'^*T'}\varphi')(A'^*)=\langle A'x_0,V'^*T'x_0\rangle$$

かつ $\{\mathfrak{R}'x_0\}^-=\mathscr{H}$ であるから，$Tx_0=V'^*T'x_0$．また，

$$\langle A'x_0,T'x_0\rangle=\psi'(A'^*)=(\mathrm{R}_{V'V'^*T'}\varphi')(A'^*)=\langle A'x_0,V'V'^*T'x_0\rangle$$

となるから，$T'x_0=V'V'^*T'x_0$．したがって，任意の $A\in\mathfrak{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\psi(A)&=\langle T'x_0,AT'x_0\rangle=\langle V'V'^*T'x_0,AT'x_0\rangle\\&=\langle V'^*T'x_0,AV'^*T'x_0\rangle=\langle Tx_0,ATx_0\rangle=\varphi(TAT).\end{aligned}$$

次に，一意性を示すために，$T_1\in\mathfrak{R}_+$ も $\psi(A)=\varphi(T_1AT_1)$ $(\forall A\in\mathfrak{R})$ を満たすとすると，

$$\|ATx_0\|^2=\varphi(TA^*AT)=\varphi(T_1A^*AT_1)=\|AT_1x_0\|^2, \quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

よって，初期空間が $\{\mathfrak{N}Tx_0\}^-$ である半等距離作用素 $W'\in\mathfrak{N}'$ が存在して $W'ATx_0=AT_1x_0$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．いま $\omega', \omega_1'\in\mathfrak{N}'_{*,+}$ を $\omega'(A')=\langle x_0, A'Tx_0\rangle, \omega_1'(A')=\langle x_0, A'T_1x_0\rangle$ $(A'\in\mathfrak{N}')$ と定めると，$\omega_1'(A')=\langle x_0, A'W'Tx_0\rangle=(\mathrm{R}_{W'}\omega')(A')$ より，$\omega_1'=R_{W'}\omega'$．また，$E'\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}')$, $\omega'(E')=0$ ならば，$E'T^{1/2}x_0=0$ より $E'\{\mathfrak{N}T^{1/2}x_0\}^-=0$．これより，$\mathrm{s}(\omega')$ は $\{\mathfrak{N}T^{1/2}x_0\}^-=\{\mathfrak{N}Tx_0\}^-$ への射影作用素であることがわかる．したがって $W'^*W'=\mathrm{s}(\omega')$ となり，極分解の一意性から $\omega_1'=\omega'$ を得る．ゆえに $T_1=T$. ∎

〈定理 6.7〉 $\varphi, \psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$, $\psi\leqq\varphi$ ならば，$0\leqq T\leqq I$ である $T\in\mathfrak{N}$ が存在して $\psi(A)=\dfrac{1}{2}\varphi(TA+AT)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．さらに，$\varphi$ が忠実ならば，T は一意である．

証明 $T\in\mathfrak{N}_+$ に対して $\varphi_T(A)=\dfrac{1}{2}\varphi(TA+AT)$ $(A\in\mathfrak{N})$ とおくと，$\varphi_T\in(\mathfrak{N}_*)_{sa}$. $\mathfrak{N}_{+,1}\equiv\{T\in\mathfrak{N}\,;\,0\leqq T\leqq I\}$ が τ^{uw}-コンパクトであるから，写像 $T\longmapsto\varphi_T$ の連続性より，$\mathcal{F}=\{\varphi_T\,;\,T\in\mathfrak{N}_{+,1}\}$ は $(\mathfrak{N}_*)_{sa}$ の中で弱コンパクトな凸集合である．いま，$\psi\notin\mathcal{F}$ とすると，Hahn-Banach の定理より，$A\in\mathfrak{N}_{sa}=((\mathfrak{N}_*)_{sa})^*$ が存在して $\varphi_T(A)<\psi(A)$ $(\forall T\in\mathfrak{N}_{+,1})$．$A=A_+-A_-$ として $T=\mathrm{s}(A_+)$ とおくと，$\psi(A_+)\geqq\psi(A)>\varphi_T(A)=\varphi(A_+)$．これは $\psi\leqq\varphi$ に矛盾する．したがって $\psi\in\mathcal{F}$．次に，φ を忠実として一意性を示す．$T, T_1\in\mathfrak{N}_+$, $\varphi_T=\varphi_{T_1}$ とすると，

$$(T-T_1)^2=\frac{1}{2}\{T(T-T_1)+(T-T_1)T-T_1(T-T_1)-(T-T_1)T_1\}$$

より，$\varphi((T-T_1)^2)=\varphi_T(T-T_1)-\varphi_{T_1}(T-T_1)=0$. φ が忠実だから，$T=T_1$. ∎

上述の〈定理 6.6〉は，Takesaki によって $\psi\ll\varphi$ の場合へ拡張された（〈定理 6.10〉）．いま，$\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実で，巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ と書けるとする．$\mathcal{H}$ の中の閉凸錐 $V_{x_0}^0$ を $V_{x_0}^0=\{\mathfrak{N}_+x_0\}^-$ で与える．このとき，次の 2 つの補題が成立する．

〈補題 6.8〉 任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，次は同値である．

（1） 正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}$ が存在して $x=Tx_0$.

（2） $x\in V_{x_0}^0$.

（3） $\langle x_0, A'x\rangle\geqq0, \quad \forall A'\in\mathfrak{N}'_+$.

証明 （1）⇒（2）：T のスペクトル分解 $T=\int_0^\infty\lambda\, dE_\lambda$ をとり $T_n=\int_0^n\lambda\, dE_\lambda$ とおくと，$T_n\in\mathfrak{N}_+$ であり，$\|T_nx_0-x\|\to0$ $(n\to\infty)$．よって $x\in V_{x_0}^0$.

（2）⇒（3）：$x\in\mathfrak{N}_+x_0$ のとき，明らかに（3）は成立する．よって，任意の $x\in V_{x_0}^0$ に

対して成立する.

(3)⇒(1):$\mathrm{dom}\,T_0=\mathfrak{N}'x_0$ 上で $T_0A'x_0=A'x$ $(A'\in\mathfrak{N}')$ と定めると,$\langle A'x_0, T_0A'x_0\rangle=\langle x_0, A'^*A'x\rangle\geqq 0$ $(\forall A'\in\mathfrak{N}')$ より,T_0 は稠密な定義域をもつ正の対称作用素で,$U'T_0U'^*=T_0$ $(\forall U'\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}'))$ が成立する.T_0 に対する Friedrichs の自己共役拡張を T とする.すなわち,$\mathrm{dom}\,T$ は $\|y_n-y\|\to 0$ かつ $\langle y_m-y_n, T_0(y_m-y_n)\rangle\to 0$ $(m, n\to\infty)$ となる $\{y_n\}\subset\mathrm{dom}\,T_0$ が存在するような $y\in\mathrm{dom}\,T_0^*$ の全体であり,T は T_0^* を $\mathrm{dom}\,T$ 上に制限して得られる作用素とする(詳しくは[1]のXII.5参照).任意の $U'\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}')$ に対して,$U'T_0^*U'^*=T_0^*$ かつ $U'(\mathrm{dom}\,T)=\mathrm{dom}\,T$ が容易にわかるから,$U'TU'^*=T$.よって,正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}$ が存在して $Tx_0=x$. ∎

〈補題 6.9〉 任意の $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して,$y\in\mathcal{H}$ が存在して $\psi(A)=\langle y, Ay\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

証明 まず,$\psi\geqq\varphi$ を仮定する.〈定理 6.6〉より,$T\in\mathfrak{N}$, $0\leqq T\leqq I$ が存在して $\varphi(A)=\psi(TAT)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.$T$ のスペクトル分解 $T=\int_0^1\lambda dE_\lambda$ をとり,$P_n=\int_{1/n}^1 dE_\lambda$, $B_n=\int_{1/n}^1\lambda^{-1}dE_\lambda$, $y_n=B_nx_0$ とおく.$TB_n=P_n$ より,

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\langle(B_m-B_n)x_0, (B_m-B_n)x_0\rangle=\varphi((B_m-B_n)^2)\\&=\psi(T(B_m-B_n)^2T)=\psi((P_m-P_n)^2)=\psi(P_m-P_n)\to 0\ (m>n\to\infty).\end{aligned}$$

よって $y\in\mathcal{H}$ が存在して $\|y_n-y\|\to 0$.このとき,任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して,$P_n\xrightarrow{s}I$ より

$$\psi(A)=\lim_{n\to\infty}\psi(P_nAP_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(B_nAB_n)=\lim_{n\to\infty}\langle y_n, Ay_n\rangle=\langle y, Ay\rangle.$$

一般の $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対しては,$\varphi+\psi\geqq\varphi$ より,$y_0\in\mathcal{H}$ が存在して $(\varphi+\psi)(A)=\langle y_0, Ay_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.また,〈定理 6.6〉より,$T_0\in\mathfrak{N}$, $0\leqq T_0\leqq I$ が存在して $\psi(A)=(\varphi+\psi)(T_0AT_0)=\langle T_0y_0, AT_0y_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.よって $y=T_0y_0$ とおけばよい. ∎

〈定理 6.10〉 $\varphi, \psi\in\mathfrak{N}_{*,+}, \psi\ll\varphi$ ならば,$\mathrm{s}(T)\leqq\mathrm{s}(\varphi)$ である正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}$ が存在して $\psi(A)=\varphi(TAT)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.(ただし,$T_n\in\mathfrak{N}_+$, $T_n\uparrow T$ によって $\varphi(TAT)=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nAT_n)$ とする.)

証明 〈定理 6.6〉の証明と同様に,$\mathrm{s}(\varphi)=I$ であり,巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ と書けるとしてよい.このとき,〈補題 6.8〉より,$x\in V_{x_0}^0$ が存在して $\psi(A)=\langle x, Ax\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ となることを示せばよい.〈補題 6.9〉より,$y\in\mathcal{H}$ が存在して $\psi(A)=\langle y, Ay\rangle$.$\psi'(A')=\langle x_0, A'y\rangle$ $(A'\in\mathfrak{N}')$ とおいて,ψ' の極分解 $\psi'=\mathrm{R}_{V'}|\psi'|$ をとる.$x=V'^*y$ とおくと,$|\psi'|(A')=(\mathrm{R}_{V'^*}\psi')(A')=\langle x_0, A'x\rangle$ であるから,〈補題 6.8〉より $x\in V_{x_0}^0$.また,$\langle A'x_0, y\rangle=(\mathrm{R}_{V'}|\psi'|)(A'^*)=\langle A'x_0, V'x\rangle$ $(\forall A'\in\mathfrak{N}')$ より,$y=V'x$.したがって,任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して,

$$\psi(A)=\langle y, Ay\rangle=\langle V'x, Ay\rangle=\langle x, AV'^*y\rangle=\langle x, Ax\rangle.$$ ∎

以下，$\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ は忠実であるとし，σ_t^{φ} を5.2節で導入した φ に関するモジュラー自己同型群とする．Pedersen–Takesaki は，$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が σ_t^{φ}-不変なときおよび KMS 条件を満たすときの RN 定理を与えた．任意の $T\in(\mathfrak{N}_{\varphi})_+$ に対して，$\varphi(TA)=\varphi(T^{1/2}AT^{1/2})$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ より $\varphi(T\cdot)\in\mathfrak{N}_{*,+}$ である．$T_1,T_2\in(\mathfrak{N}_{\varphi})_+$, $T_1\leqq T_2$ ならば，$\varphi(T_1A)\leqq\varphi(T_1A)+\varphi((T_2-T_1)A)=\varphi(T_2A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$ より $\varphi(T_1\cdot)\leqq\varphi(T_2\cdot)$．さて，任意の正の自己共役作用素 $T\eta\,\mathfrak{N}_{\varphi}$ に対して，$T_{\varepsilon}=T(I+\varepsilon T)^{-1}\in(\mathfrak{N}_{\varphi})_+(\varepsilon>0)$ とおくと，$T_{\varepsilon}\uparrow T(\varepsilon\downarrow 0)$ である．そこで，

$$\varphi(TA)=\sup_{\varepsilon>0}\varphi(T_{\varepsilon}A)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(T_{\varepsilon}A),\quad A\in\mathfrak{N}_+$$

と定める．$\mathcal{H}$ 上の正の自己共役作用素 T_1, T_2 に対して，$(I+T_1)^{-1}\geqq(I+T_2)^{-1}$ のとき，$T_1\leqq T_2$ と書く．$T_1\leqq T_2$ は，$\mathrm{dom}\,T_1^{1/2}\supset\mathrm{dom}\,T_2^{1/2}$ かつ $\|T_1^{1/2}x\|\leqq\|T_2^{1/2}x\|$ $(\forall x\in\mathrm{dom}\,T_2^{1/2})$ と同値であり，このとき $(T_1)_{\varepsilon}\leqq(T_2)_{\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ が成立する．さらに，正の自己共役作用素のネット $\{T_j\}$ が $(I+T_j)^{-1}\downarrow(I+T)^{-1}$ を満たすとき，$T_j\uparrow T$ と書く．このとき，$(T_j)_{\varepsilon}\uparrow T_{\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ が成立する．

〈補題 6.11〉 T, T_1, T_2, T_j を $\mathfrak{N}_{\varphi}$ に付随的な正の自己共役作用素とするとき，次が成立する．

（1） $T_1\leqq T_2\Longleftrightarrow\varphi(T_1A)\leqq\varphi(T_2A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$．

（2） $T_j\uparrow T\Longleftrightarrow\varphi(T_jA)\uparrow\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$．

（3） $\varphi(T)<\infty$ ならば，$\varphi(T\cdot)$ は $\mathfrak{N}$ 上の線形汎函数に拡張できて $\varphi(T\cdot)\in\mathfrak{N}_{*,+}$．

証明 （1）：$T_1\leqq T_2$ ならば，$(T_1)_{\varepsilon}\leqq(T_2)_{\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ だから，$\varphi(T_1A)\leqq\varphi(T_2A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$ は明らかである．逆を示すために，巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ と書けるとしてよい．x_0 に関するモジュラー作用素 Δ とモジュラー共役作用素 J を用いる．まず，$A\in\mathfrak{N}$，$B\in\mathfrak{N}_{\varphi}$ のとき，$ABx_0=JB^*JAx_0$ を示す．〈定理 5.15〉の証明からわかるように，$Bx_0=R^{1/2}x_1$ と書けて，函数 $z\longmapsto\Delta^{-iz}Bx_0=R^{i(z-i/2)}(2I-R)^{-iz}x_1$ は $D_{-1/2}$ で解析的かつ $\bar{D}_{-1/2}$ で有界連続である．ところで，$\Delta^{-it}B\Delta^{it}=B$ より $\Delta^{-it}Bx_0=Bx_0$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．よって $\Delta^{-iz}Bx_0=Bx_0$ $(\forall z\in\bar{D}_{-1/2})$ となり，$\Delta^{1/2}Bx_0=Bx_0$．したがって，$JAJ\in\mathfrak{N}'$ より

$$ABx_0=AJJ\Delta^{1/2}Bx_0=J(JAJ)B^*x_0=JB^*JAJx_0=JB^*JAx_0.$$

そこで，$\varphi(T_1A)\leqq\varphi(T_2A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$ とする．T_2 のスペクトル分解 $T_2=\int_0^{\infty}\lambda\,dE_{\lambda}$ をとり，$P_n=\int_0^{n}dE_{\lambda}$ とおく．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$P_n(T_1)_{\varepsilon}P_n\in\mathfrak{N}_{\varphi}$ より

$$\langle P_n(T_1)_\varepsilon P_nJAx_0, JAx_0\rangle = \langle Ax_0, JP_n(T_1)_\varepsilon P_nJAx_0\rangle$$
$$= \langle Ax_0, AP_n(T_1)_\varepsilon P_nx_0\rangle = \varphi(A^*AP_n(T_1)_\varepsilon P_n) = \varphi((T_1)_\varepsilon P_nA^*AP_n)$$
$$\leqq \varphi(T_2P_nA^*AP_n) = \varphi(A^*AT_2P_n) = \langle Ax_0, AT_2P_nx_0\rangle$$
$$= \langle Ax_0, JT_2P_nJAx_0\rangle = \langle T_2P_nJAx_0, JAx_0\rangle.$$

よって $P_n(T_1)_\varepsilon P_n \leqq T_2P_n$. $n\to\infty$ とすると，$(T_1)_\varepsilon \leqq T_2$. さらに，$\varepsilon\downarrow 0$ とすると，$T_1\leqq T_2$.

（2）：$T_j\uparrow T$ のとき，$(T_j)_\varepsilon \uparrow T_\varepsilon$ $(\forall\varepsilon>0)$ だから，任意の $A\in\mathfrak{N}_+$ に対して，

$$\varphi(TA) = \sup_{\varepsilon>0}\varphi(T_\varepsilon A) = \sup_{\varepsilon>0}\ \sup_j \varphi((T_j)_\varepsilon A) = \sup_j \varphi(T_jA).$$

逆に，$\varphi(T_jA)\uparrow\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$ とすると，（1）より $\{T_j\}$ は単調増大ネットになる．よって正の自己共役作用素 $T_0\eta\mathfrak{N}_\varphi$ が存在して $T_j\uparrow T_0$. したがって $\varphi(T_0A) = \sup_j\varphi(T_jA)$ $= \varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_+)$. 再び（1）より，$T_0 = T$.

（3）：$\varphi(T)<\infty$ のとき，$\varphi(T\cdot)$ が $\mathfrak{N}$ 上の正の線形汎函数として一意に拡張できることは明らかである．また，$\varphi(T\cdot)$ が正規であることも容易にわかる．▌

〈補題 6.12〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ は忠実とする．$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$, $\psi\leqq\varphi$, $\psi\circ\sigma_t^\varphi = \psi$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ ならば，$0\leqq T\leqq I$ である $T\in\mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して $\psi(A) = \varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

証明 〈定理 6.7〉より，$0\leqq T\leqq I$ である $T\in\mathfrak{N}$ が一意に存在して $\psi(A) = \frac{1}{2}\varphi(TA+AT)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. $\psi\circ\sigma_t^\varphi = \psi$ より，

$$\psi(A) = \frac{1}{2}\varphi(T\sigma_t^\varphi(A) + \sigma_t^\varphi(A)T) = \frac{1}{2}\varphi(\sigma_{-t}^\varphi(T)A + A\sigma_{-t}^\varphi(T)).$$

T の一意性から，$\sigma_{-t}^\varphi(T) = T$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$. よって〈定理 5.25〉より，$T\in\mathfrak{N}_\varphi$. したがって $\psi(A) = \varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. ▌

〈定理 6.13〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実のとき，$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，次は同値である．

（1） ψ は σ_t^φ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．

（2） 正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{Z}$ $(\equiv\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}')$ が一意に存在して $\psi(A) = \varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

証明 （2）⇒（1）：$T_n\uparrow T$ となる $\{T_n\}\subset\mathfrak{Z}_+$ をとり，$\psi_n(A) = \varphi(T_nA)$ とおくと，$\|\psi_n - \psi\|\to 0$. 各 n と任意の $A, B\in\mathfrak{N}$ に対して，D_{-1} で解析的かつ $\bar{D}_{-1}$ で有界連続な $F_n(z)$ が存在して，

$$F_n(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(T_nA)B) = \psi_n(\sigma_t^\varphi(A)B),$$
$$F_n(t+i) = \varphi(B\sigma_t^\varphi(T_nA)) = \psi_n(B\sigma_t^\varphi(A)),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

よって，各 ψ_n は σ_t^φ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．したがって ψ も同じ KMS 条件を満たす．

（1）⇒（2）：〈定理 5.1〉より，$\psi\circ\sigma_t^\varphi = \psi$. まず，$\psi\leqq\varphi$ とすると，〈補題 6.12〉より

$T\in(\mathfrak{N}_\varphi)_+$ が存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. 任意の $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ と $A\in\mathfrak{N}$ に対して, D_{-1} で解析的かつ $\bar{D}_{-1}$ で有界連続な $F(z)$ および $G(z)$ が存在して,

$$F(t)=\varphi(\sigma_t{}^\varphi(TU^*A)U),\quad F(t+i)=\varphi(U\sigma_t{}^\varphi(TU^*A)),$$
$$G(t)=\psi(\sigma_t{}^\varphi(U^*A)U),\quad G(t+i)=\psi(U\sigma_t{}^\varphi(U^*A)),\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$$

$T\in\mathfrak{N}_\varphi$ より, $G(t)=F(t)$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$. よって $G(z)\equiv F(z)$. 特に $G(i)=F(i)$ より, $\psi(A)=\varphi(UTU^*A)$. したがって, T の一意性から $UTU^*=T$ $(\forall U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}))$. これで $T\in\mathfrak{Z}$ が示せた. 一般の ψ に対しては, $\omega=\varphi+\psi$ が $\sigma_t{}^\varphi$ に関して KMS 条件を満たすから $\sigma_t{}^\omega=\sigma_t{}^\varphi$. $\varphi\leqq\omega$ だから, $T_0\in\mathfrak{Z}$, $0\leqq T_0\leqq I$ が存在して $\varphi(A)=\omega(T_0A)$. よって $\psi(A)=(\omega-\varphi)(A)=\omega((I-T_0)A)$. φ が忠実だから, T_0 は 1 対 1 である. そこで, $T=(I-T_0)T_0{}^{-1}$ とおくと, T は正の自己共役作用素で $T\eta\,\mathfrak{Z}$. $(I-T_0)(T_0+\varepsilon I)^{-1}\uparrow T(\varepsilon\downarrow 0)$ であるから, 〈補題 6.11〉の (2) より

$$\begin{aligned}\varphi(TA)&=\sup_{\varepsilon>0}\varphi((I-T_0)(T_0+\varepsilon I)^{-1}A)\\&=\sup_{\varepsilon>0}\omega(T_0(T_0+\varepsilon I)^{-1}(I-T_0)A)\\&=\omega((I-T_0)A)=\psi(A),\quad \forall A\in\mathfrak{N}_+.\end{aligned}$$

ゆえに $\psi(A)=\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. T の一意性は, 〈補題 6.11〉の (1) より明らか. ▮

〈定理 6.14〉 $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実のとき, 次は同値である.

(1) $\psi\circ\sigma_t{}^\varphi=\psi,\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$

(2) $\varphi\circ\sigma_t{}^\psi=\varphi,\quad \forall t\in\boldsymbol{R}.$

(3) $\sigma_s{}^\varphi\circ\sigma_t{}^\psi=\sigma_t{}^\psi\circ\sigma_s{}^\varphi,\quad \forall s,t\in\boldsymbol{R}.$

(4) 正の自己共役作用素 $T\eta\,\mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

このとき, (4) の T は $T\eta(\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_\psi)$ でもある.

証明 (1)⇒(3):〈定理 5.24〉より, $\sigma_t{}^\psi=\sigma_t{}^{\psi\circ\sigma_s{}^\varphi}=(\sigma_s{}^\varphi)^{-1}\circ\sigma_t{}^\psi\circ\sigma_s{}^\varphi$ $(\forall s,t\in\boldsymbol{R})$. よって (3) が成立する.

(3)⇒(1):$\sigma_t{}^{\psi\circ\sigma_s{}^\varphi}=\sigma_t{}^\psi$ $(\forall s,t\in\boldsymbol{R})$ となるから, $\psi\circ\sigma_s{}^\varphi$ は $\sigma_t{}^\psi$ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす. よって〈定理 6.13〉より, 正の自己共役作用素 $T_s\eta\mathfrak{Z}$ が存在して $(\psi\circ\sigma_s{}^\varphi)(A)=\psi(T_sA)$. そこで, $T_s=I$ $(\forall s\in\boldsymbol{R})$ を示せばよい. いま, $T_s\neq I$ とすると, T_s のスペクトル分解を考えれば, $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z})$ が存在して, $T_sP\in\mathfrak{Z}$ で $T_sP\gneqq P$ または $T_sP\lneqq P$ となる. 〈定理 5.25〉より $\sigma_s{}^\varphi(P)=P$ であるから, $\psi(T_sP)=\psi(\sigma_s{}^\varphi(P))=\psi(P)$. ψ が忠実だから, これは矛盾である. したがって $T_s=I$.

(2)⟺(3) も同様である.

(4)⇒(1):$T_n\uparrow T$ となる $\{T_n\}\subset(\mathfrak{N}_\varphi)_+$ をとり, $\psi_n(A)=\varphi(T_nA)$ とおくと, $\|\psi_n-\psi\|\to 0$. 各 n に対して,

$$\psi_n(\sigma_t^{\varphi}(A))=\varphi(T_n\sigma_t^{\varphi}(A))=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(T_nA))=\varphi(T_nA)=\psi_n(A), \quad \forall A\in\mathfrak{N}$$

であるから，$\psi_n\circ\sigma_t^{\varphi}=\psi_n$. よって $\psi\circ\sigma_t^{\varphi}=\psi$.

(1)⇒(4)：$\omega=\varphi+\psi$ とおくと，$\omega\circ\sigma_t^{\varphi}=\omega$. (1)⟺(2) より，$\varphi\circ\sigma_t^{\omega}=\varphi$. $\varphi\leqq\omega$ だから，〈補題 6.12〉より，$T_0\in\mathfrak{N}_\omega$, $0\leqq T_0\leqq I$ が存在して $\varphi(A)=\omega(T_0A)$. このとき，$\varphi(T_0A)=\omega(T_0^2A)=\omega(T_0AT_0)=\varphi(AT_0)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) より，$T_0\in\mathfrak{N}_\varphi$. $\psi(A)=\omega((I-T_0)A)$ だから，同じく $T_0\in\mathfrak{N}_\psi$. T_0 は1対1であるから，$T=(I-T_0)T_0^{-1}$ とおくと，T は正の自己共役作用素で $T\eta(\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_\psi)$. さらに，〈定理 6.13〉の証明と同様にして，$\psi(A)=\varphi(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$) が成立する．また，T の一意性は，〈補題 6.11〉の (1) より明らか. ∎

[**定義 6.1**] 忠実な $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，〈定理 6.14〉の条件が成立するとき，φ と ψ は**可換**であるという．

〈**系 6.15**〉 $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実のとき，$\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，次は同値である．

(1) $\psi\circ\sigma_t^{\varphi}=\psi$, $\forall t\in\boldsymbol{R}$.

(2) 正の自己共役作用素 $T\eta\,\mathfrak{N}_\varphi$ が一意に存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$).

証明 (1)⇒(2)：$(\varphi+\psi)\circ\sigma_t^{\varphi}=\varphi+\psi$ だから，〈定理 6.14〉より，正の自己共役作用素 $T_1\eta\mathfrak{N}_\varphi$ が存在して $(\varphi+\psi)(A)=\varphi(T_1A)$. 〈補題 6.11〉の (1) より $T_1\geqq I$ となるから，$T=T_1-I$ とおくと，$\psi(A)=\varphi(TA)$.

(2)⇒(1) は，〈定理 6.14〉の (4)⇒(1) と同様である. ∎

次に，Connes が導入したユニタリー・コサイクルについて説明しよう．$\mathfrak{N}$ の元を成分とする 2×2 行列全体からなる v.N. 代数 $\mathfrak{N}\otimes M_2$ (ここで M_2 は 2×2 複素行列の全体) を考える．すなわち，$\tilde{A}\in\mathfrak{N}\otimes M_2$ は $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, $A_{ij}\in\mathfrak{N}$ と書ける．特に，

$$E_{11}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ I & 0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

とおく．いま，2つの忠実な $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$\mathfrak{N}\otimes M_2$ 上の線形汎函数 ω を

$$\omega(\tilde{A})=\varphi(A_{11})+\psi(A_{22}),\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\in\mathfrak{N}\otimes M_2$$

と定めると，$\omega\in(\mathfrak{N}\otimes M_2)_{*,+}$ かつ ω が忠実であることは容易に示せる．そこで，ω に関するモジュラー自己同型群 σ_t^{ω} をとる．$\omega(E_{11}\tilde{A})=\varphi(A_{11})=\omega(\tilde{A}E_{11})$ より $E_{11}\in(\mathfrak{N}\otimes M_2)_\omega$ となるから，$\sigma_t^{\omega}(E_{11})=E_{11}$. 同様に，$\sigma_t^{\omega}(E_{22})=E_{22}$.

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}E_{11}$ より，$\sigma_t{}^{\omega}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}\sigma_t{}^{\omega}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}E_{11}$. したがって，$\mathfrak{N}$ の自己同型群 α_t が存在して，$\sigma_t{}^{\omega}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_t(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\forall A \in \mathfrak{N}, \forall t \in \boldsymbol{R})$. このとき，$\varphi$ が α_t に関して $\beta = -1$ で KMS 条件を満たすことはすぐにわかる．よって $\alpha_t = \sigma_t{}^{\varphi}$ となるから，

$$\sigma_t{}^{\omega}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_t{}^{\varphi}(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall A \in \mathfrak{N}.$$

同様に，

$$\sigma_t{}^{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t{}^{\psi}(A) \end{pmatrix}, \quad \forall A \in \mathfrak{N}.$$

さて，$E_{21} = E_{22}E_{21}E_{11}$ より $\sigma_t{}^{\omega}(E_{21}) = E_{22}\sigma_t{}^{\omega}(E_{21})E_{11}$. よって $U_t \in \mathfrak{N}$ が存在して $\sigma_t{}^{\omega}(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_t & 0 \end{pmatrix}$. このとき，$\sigma_t{}^{\omega}(E_{12}) = \sigma_t{}^{\omega}(E_{21}{}^*) = \begin{pmatrix} 0 & U_t{}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $E_{12}E_{21} = E_{11}$, $E_{21}E_{12} = E_{22}$ より $U_t{}^*U_t = U_tU_t{}^* = I$ となるから，$U_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{N})$. $\sigma_t{}^{\omega}$ の τ^s-連続性から，$t \longmapsto U_t$ は τ^s-連続である．ところで，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = E_{21}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}E_{12}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t{}^{\psi}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_t{}^{\varphi}(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & U_t{}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_t\sigma_t{}^{\varphi}(A)U_t{}^* \end{pmatrix}.$$

したがって $\sigma_t{}^{\psi}(A) = U_t\sigma_t{}^{\varphi}(A)U_t{}^*$ $(\forall A \in \mathfrak{N}, \forall t \in \boldsymbol{R})$. さらに，

$$\begin{aligned}\sigma_{s+t}{}^{\omega}(E_{21}) &= \sigma_s{}^{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_t & 0 \end{pmatrix} = \sigma_s{}^{\omega}\left(E_{21}\begin{pmatrix} U_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_s{}^{\varphi}(U_t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U_s\sigma_s{}^{\varphi}(U_t) & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるから，$U_{s+t} = U_s\sigma_s{}^{\varphi}(U_t)$ $(\forall s, t \in \boldsymbol{R})$.

［**定義 6.2**］ 忠実な $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，上で与えた $t \in \boldsymbol{R} \longmapsto U_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{N})$ を φ に関する ψ の **Connes コサイクル**と呼び，$U_t = (D\psi : D\varphi)_t$ で表す．

Connes コサイクルの性質をまとめると，

〈**定理 6.16**〉 忠実な $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$U_t = (D\psi : D\varphi)_t$ とすると，次が成立する．

（1） $t \in \boldsymbol{R} \longmapsto U_t \in \mathcal{U}(\mathfrak{N})$ は τ^s-連続である．

（2） $\sigma_t^{\psi}(A)=U_t\sigma_t^{\varphi}(A)U_t^*,\ \ \forall A\in\mathfrak{N},\ \ \forall t\in\boldsymbol{R}.$

（3） $U_{s+t}=U_s\sigma_s^{\varphi}(U_t),\ \ \forall s,t\in\boldsymbol{R}$ （コサイクル条件）.

〈定理 6.17〉 忠実な φ,ψ,φ_k $(k=1,2,3)\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，次が成立する．

（1） $(D\psi:D\varphi)_t=(D\varphi:D\psi)_t^*,\ \ \forall t\in\boldsymbol{R}.$

（2） $(D\varphi_3:D\varphi_1)_t=(D\varphi_3:D\varphi_2)_t(D\varphi_2:D\varphi_1)_t,\ \ \forall t\in\boldsymbol{R}.$

（3） $(D\varphi_1:D\varphi)_t=(D\varphi_2:D\varphi)_t$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})\Longleftrightarrow\varphi_1=\varphi_2.$

証明 （1）：φ と ψ の立場を入れ換えて考えれば，

$$\begin{pmatrix}0 & (D\varphi:D\psi)_t\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\sigma_t^{\omega}(E_{12})=\begin{pmatrix}0 & (D\psi:D\varphi)_t^*\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

（2）：$\mathfrak{N}\otimes M_3$ 上で

$$\omega(\tilde{A})=\varphi_{11}(A_{11})+\varphi_2(A_{22})+\varphi_3(A_{33}),\quad \tilde{A}=(A_{ij})_{i,j=1,2,3}$$

と定める．$E_{ij}\in\mathfrak{N}\otimes M_3$ $(i,j=1,2,3)$ を $\mathfrak{N}\otimes M_2$ の場合と同様におくと，$E_{ii}\in(\mathfrak{N}\otimes M_3)_{\omega}$ $(i=1,2,3)$．$E=E_{11}+E_{22}\in(\mathfrak{N}\otimes M_3)_{\omega}$ とおくと，$(\mathfrak{N}\otimes M_3)_E=\mathfrak{N}\otimes M_2$ であり，$\omega_E=\omega\restriction(\mathfrak{N}\otimes M_3)_E$ は $\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\longmapsto\varphi_1(A_{11})+\varphi_2(A_{22})$ と一致する．さらに，ω_E は $\sigma_t^{\omega}\restriction(\mathfrak{N}\otimes M_3)_E$ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たすから，$\sigma_t^{\omega_E}=\sigma_t^{\omega}\restriction(\mathfrak{N}\otimes M_3)_E$．したがって

$$\sigma_t^{\omega}(E_{21})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ (D\varphi_2:D\varphi_1)_t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

同様にして，

$$\sigma_t^{\omega}(E_{31})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ (D\varphi_3:D\varphi_1)_t & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_t^{\omega}(E_{32})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & (D\varphi_3:D\varphi_2)_t & 0\end{pmatrix}.$$

$E_{31}=E_{32}E_{21}$ より，

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ (D\varphi_3:D\varphi_1)_t & 0 & 0\end{pmatrix}=\sigma_t^{\omega}(E_{32}E_{21})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ (D\varphi_3:D\varphi_2)_t(D\varphi_2:D\varphi_1)_t & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

（3）：φ_1,φ_2 に対して，$\mathfrak{N}\otimes M_2$ 上の ω を定める．$(D\varphi_1:D\varphi)_t=(D\varphi_2:D\varphi)_t$ のとき，（1），（2）を用いると，$(D\varphi_2:D\varphi_1)_t=I$．よって $\sigma_t^{\omega}(E_{21})=E_{21}$ となるから，$\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}=E_{21}+E_{21}^*\in(\mathfrak{N}\otimes M_2)_{\omega}$．したがって

$$\varphi_1(A)=\omega\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\omega\left(\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\right)=\omega\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}=\varphi_2(A).\ \blacksquare$$

〈補題 6.18〉 忠実な $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ が〈定理 6.14〉の条件（4）を満たすならば，$\sigma_t^{\psi}(A)=T^{it}\sigma_t^{\varphi}(A)T^{-it}$ $(\forall A\in\mathfrak{N},\forall t\in\boldsymbol{R})$.

証明 $\alpha_t(A)=T^{it}\sigma_t^{\varphi}(A)T^{-it}$ とおくと，α_t は $\mathfrak{N}$ の τ^s-連続な自己同型群となる．まず，T が有界かつ可逆とする．このとき，$A\in\mathfrak{N}$ が σ^{φ}-解析的であることと α-解析的であることは同値である．$A\in\mathfrak{N}$ が σ^{φ}-解析的なとき，$\alpha_{-i}(A)=T\sigma_{-i}^{\varphi}(A)T^{-1}$ だから，〈定理 5.3〉より，

$$\psi(AB)=\varphi(ABT)=\varphi(BT\sigma_{-i}^{\varphi}(A))=\varphi(B\alpha_{-i}(A)T)=\psi(B\alpha_{-i}(A))$$

が任意の $B\in\mathfrak{N}$ に対して成立する．よって〈定理 5.3〉より，ψ は α_t に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす．ゆえに $\sigma_t^{\psi}=\alpha_t$．一般の T に対しては，スペクトル分解 $T=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ をとり，$P_n=\int_{1/n}^n dE_\lambda$ とおく．φ,ψ の $\mathfrak{N}_{P_n}=P_n\mathfrak{N}P_n$ 上への制限を φ_n,ψ_n とする．〈定理 6.14〉より $P_n\in\mathfrak{N}_\varphi\cap\mathfrak{N}_\psi$ だから，$\sigma_t^{\varphi_n}=\sigma_t^{\varphi}{\restriction}\mathfrak{N}_{P_n}$，$\sigma_t^{\psi_n}=\sigma_t^{\psi}{\restriction}\mathfrak{N}_{P_n}$．さらに，$\psi_n=\varphi_n(TP_n\cdot)$ であり，TP_n は $\mathfrak{N}_{P_n}$ において有界かつ可逆である．よって，任意の $A\in\mathfrak{N}_{P_n}$ に対して，

$$\sigma_t^{\psi}(A)=\sigma_t^{\psi_n}(A)=(TP_n)^{it}\sigma_t^{\varphi_n}(A)(TP_n)^{-it}=T^{it}P_n\sigma_t^{\varphi}(A)P_nT^{-it}=\alpha_t(A).$$

$\bigcup_n\mathfrak{N}_{P_n}$ が $\mathfrak{N}$ で τ^s-稠密だから，$\sigma_t^{\psi}=\alpha_t$ を得る．▮

〈定理 6.19〉 忠実な $\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，φ と ψ が可換であることと，$\{(D\psi:D\varphi)_t\,;\,t\in\boldsymbol{R}\}$ が群であることは同値である．このとき，〈定理 6.14〉の（4）の T を用いて，$(D\psi:D\varphi)_t=T^{it}$ と書ける．

証明 $U_t=(D\psi:D\varphi)_t$ とする．$\varphi\circ\sigma_t^{\psi}=\varphi$ ならば，〈定理 6.16〉の（2）より

$$\varphi(A)=\varphi(\sigma_t^{\psi}(\sigma_{-t}^{\varphi}(A)))=\varphi(U_tAU_t^*),\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

よって $\varphi(U_tA)=\varphi(U_tAU_tU_t^*)=\varphi(AU_t)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ となるから，$U_t\in\mathfrak{N}_\varphi$．したがって $\sigma_s^{\varphi}(U_t)=U_t$ となり，〈定理 6.16〉の（3）より $U_{s+t}=U_sU_t$．逆に，U_t が群であるならば，〈定理 6.16〉の（3）より $\sigma_s^{\varphi}(U_t)=U_s^*U_{s+t}=U_t$．よって

$$\sigma_s^{\varphi}(\sigma_t^{\psi}(A))=\sigma_s^{\varphi}(U_t\sigma_t^{\varphi}(A)U_t^*)=U_t\sigma_s^{\varphi}(\sigma_t^{\varphi}(A))U_t^*=\sigma_t^{\psi}(\sigma_s^{\varphi}(A))$$

となり，φ と ψ は可換である．

次に，$U_t=T^{it}$ を示すために，$\mathfrak{N}\otimes M_2$ 上で

$$\tilde{\varphi}(\tilde{A})=\varphi(A_{11})+\varphi(A_{22}),\quad \omega(\tilde{A})=\varphi(A_{11})+\psi(A_{22}),\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

と定める．$\tilde{T}=\begin{pmatrix}I&0\\0&T\end{pmatrix}$ とおくと，$\tilde{T}$ は正の自己共役作用素であり，$\tilde{T}\eta(\mathfrak{N}\otimes M_2)_{\tilde{\varphi}}$ であることは容易にわかる．さらに，$\omega(\tilde{A})=\varphi(A_{11})+\varphi(TA_{22})=\tilde{\varphi}(\tilde{T}\tilde{A})$ が成立する．よって〈補題 6.18〉より，$\sigma_t^{\omega}(\tilde{A})=\tilde{T}^{it}\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\tilde{A})\tilde{T}^{-it}$．また，$\tilde{\varphi}(E_{21}\tilde{A})=\varphi(A_{12})=\tilde{\varphi}(\tilde{A}E_{21})$ より，$E_{21}\in(\mathfrak{N}\otimes M_2)_{\tilde{\varphi}}$，つまり $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(E_{21})=E_{21}$．したがって

$$\sigma_t^{\omega}(E_{21})=\begin{pmatrix}I&0\\0&T^{it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\I&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\0&T^{-it}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\T^{it}&0\end{pmatrix}$$

となり，$U_t=T^{it}$ を得る．▮

〈系 6.15〉までで与えた各種の RN 定理における T は ψ を φ と直接に結びつけるが，Connes コサイクル $(D\psi:D\varphi)_t$ は σ_t^{ψ} を σ_t^{φ} と結びつけるユニタリ

ー・コサイクルである．ψ が σ_t^φ-不変のときには，〈定理 6.19〉で示したように，$(D\psi : D\varphi)_t$ は〈定理 6.14〉の T と本質的に同じものである．Connes コサイクルは，任意の忠実な $\varphi, \psi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ に対して 2×2 行列を用いた簡便な構成法により一意的に定義できる利点があり，v.N. 代数の構造解析（7.2 節参照）で重要な道具となる．Tomita–Takesaki 理論と同じく，Pedersen–Takesaki の RN 定理および Connes コサイクルに関する結果はすべて，より一般に，φ, ψ が $\mathfrak{N}$ 上の（忠実な）半有限正規荷重の場合でそのまま成立する．特に，$\mathfrak{N}$ 上の忠実な半有限正規トレース τ に対して $\sigma_t^\tau = 1$ であるから，〈定理 6.4〉は〈系 6.15〉の特別な場合とみなせる．

Connes コサイクルのひとつの応用として，次の重要な結果を証明しよう．

〈定理 6.20〉 $\varphi \in \mathfrak{N}_{*,+}$ が忠実のとき，$\mathfrak{N}$ が半有限であることは，$\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}(U_t)$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$ を満たす τ^s-連続な 1 径数ユニタリー群 $\{U_t\} \subset \mathfrak{N}$ が存在することと同値である．

証明 $\mathfrak{N}$ が半有限ならば，〈定理 4.67〉より，$\mathfrak{N}$ は忠実な半有限正規トレース τ をもつ．ここで，証明を省いた〈定理 6.4〉を使うことにすると，正の自己共役作用素 $T \eta \mathfrak{N}$ が存在して $\varphi(A) = \tau(TA)$ $(\forall A \in \mathfrak{N})$．$T = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ として，$P_n = \int_{1/n}^n dE_\lambda$ とおき，τ, φ の $\mathfrak{N}_{P_n}$ 上への制限を τ_n, φ_n とする．$\tau(P_n) \leqq \tau(nT) = n\varphi(I) < \infty$ より，τ_n は $\mathfrak{N}_{P_n}$ 上の有限トレースであり，$\sigma_t^{\tau_n} = 1$．また，

$$\varphi(P_nA) = \tau(TP_nA) = \tau(AP_nT) = \varphi(AP_n), \quad \forall A \in \mathfrak{N}$$

であるから，$P_n \in \mathfrak{N}_\varphi$． よって $\sigma_t^{\varphi_n} = \sigma_t^\varphi \restriction \mathfrak{N}_{P_n}$． $\varphi_n(A) = \tau_n(TP_nA)$ $(\forall A \in \mathfrak{N}_{P_n})$ だから，〈補題 6.18〉より，任意の $A \in \mathfrak{N}_{P_n}$ に対して

$$\sigma_t^\varphi(A) = \sigma_t^{\varphi_n}(A) = (TP_n)^{it} A (TP_n)^{-it} = T^{it} A T^{-it}.$$

$\bigcup_n \mathfrak{N}_{P_n}$ が $\mathfrak{N}$ で τ^s-稠密だから，$\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}(T^{it})$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．

逆に，τ^s-連続なユニタリー群 $\{U_t\} \subset \mathfrak{N}$ が存在して，$\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}(U_t)$ とする．このとき，$U_t \in \mathfrak{N}_\varphi$ となるから，Stone の定理より，正の自己共役作用素 $T \eta \mathfrak{N}_\varphi$ が存在して $U_t = T^{-it}$ $(\forall t \in \boldsymbol{R})$．上記のように P_n をとり，φ の $\mathfrak{N}_{P_n}$ 上への制限を φ_n とする．さらに，$\tau_n(A) = \varphi_n(TP_nA)$ $(A \in \mathfrak{N}_{P_n})$ とおく．〈補題 6.18〉より，任意の $A \in \mathfrak{N}_{P_n}$ に対して，

$$\sigma_t^{\tau_n}(A) = (TP_n)^{it} \sigma_t^{\varphi_n}(A) (TP_n)^{-it} = T^{it} U_t A U_t^* T^{-it} = A.$$

よって τ_n は $\mathfrak{N}_{P_n}$ 上の忠実な有限トレースとなる．したがって $\mathfrak{N}_{P_n}$ は有限である． $P_n \uparrow I$ だから，$\mathfrak{N}$ は半有限である．▮

註 忠実な半有限正規荷重に対する Connes コサイクルの結果を用いれば，〈定理 6.20〉

は，φ を忠実な半有限正規荷重として，より簡単に証明できる．実際，τ が $\mathfrak{N}$ 上の忠実半有限正規トレースならば，$\sigma_t^\tau=1$ だから，〈定理 6.16〉の（2）より $\sigma_t^\varphi=\mathrm{Ad}((D\varphi:D\tau)_t)$. 逆に，$\sigma_t^\varphi=\mathrm{Ad}(T^{-it})$ ならば，$\tau(A)=\varphi(TA)$ $(A\in\mathfrak{N})$ とおいて，〈補題 6.18〉より $\sigma_t^\tau=\mathrm{Ad}(T^{it})\circ\sigma_t^\varphi=1$. よって τ は忠実半有限正規トレースとなる．

$\mathfrak{N}$ が巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ をもつとし，x_0 に関するモジュラー作用素 Δ，モジュラー共役作用素 J をとる．Araki は，$0\leqq s\leqq 1/2$ に対して，$\mathcal{H}$ の中の閉凸錐 $V_{x_0}^s=\{\Delta^s\mathfrak{N}_+x_0\}^-$ を導入した．$V_{x_0}^0$ は〈補題 6.8〉で用いたものである．特に，$V_{x_0}=V_{x_0}^{1/4}$ は**自然な正錐**と呼ばれ重要である．V_{x_0} の性質としては，次が挙げられる：（1）V_{x_0} は自己双対である (i.e., $V_{x_0}=\{y\in\mathcal{H}\,;\,\langle y,x\rangle\geqq 0,\ \forall x\in V_{x_0}\}$)；（2）$V_{x_0}\cap(-V_{x_0})=\{0\}$；（3）$\Delta^{it}V_{x_0}=V_{x_0}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$；（4）$Jx=x$ $(\forall x\in V_{x_0})$；（5）$V_{x_0}=\{Aj(A)x_0\,;\,A\in\mathfrak{N}\}^-$（ただし $j(A)=JAJ$）；（6）任意の $x\in\mathcal{H}$ は，$x=(x_1-x_2)+i(x_3-x_4)$, $x_k\in V_{x_0}$, $x_1\perp x_2$, $x_3\perp x_4$ と一意に分解される．〈定理 6.10〉の証明で，任意の $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して $\psi(A)=\langle x,Ax\rangle$ となる $x\in V_{x_0}^0$ が存在することを示した．V_{x_0} に対しても次の結果がある（実は，任意の $V_{x_0}^s$ $(0\leqq s\leqq 1/4)$ に対して，同じ結果が成立することが知られている）．

〈定理 6.21〉 任意の $\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$ に対して，$x_\psi\in V_{x_0}$ が一意に存在して $\psi(A)=\langle x_\psi, Ax_\psi\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

さらに，Araki は次の RN 定理を示した．

〈定理 6.22〉（1）$\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$, $\psi\leqq\varphi$ ならば，$T=A(\psi|\varphi)\in\mathfrak{N}$ が一意に存在して $x_\psi=Tx_\varphi$ かつ $\mathrm{s}(T^*T)\leqq\mathrm{s}(\varphi)$．このとき，$\psi(A)=\varphi(T^*AT)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ であり，$\|T\|\leqq 1$.

（2）$\varphi_k\in\mathfrak{N}_{*,+}$ $(k=1,2,3)$, $\varphi_3\leqq\varphi_2$, $\varphi_2\leqq\varphi_1$ ならば，$A(\varphi_3|\varphi_1)=A(\varphi_3|\varphi_2)A(\varphi_2|\varphi_1)$.

（3）$\varphi,\psi\in\mathfrak{N}_{*,+}$, $\psi\leqq\varphi$ のとき，次は同値である：（i）$A(\psi|\varphi)=A(\psi|\varphi)^*$；（ii）$A(\psi|\varphi)\geqq 0$；（iii）$\sigma_t^\varphi(A(\psi|\varphi))=A(\psi|\varphi)$（ただし，$\sigma_t^\varphi$ は $\varphi\restriction\mathfrak{N}_{\mathrm{s}(\varphi)}$ に関するモジュラー自己同型群）；（iv）$\mathfrak{N}_{\mathrm{s}(\varphi)}$ 上で $\psi\circ\sigma_t^\varphi=\psi$.

この節の初めで，忠実な半有限正規トレース τ に関する非可換 L^p 空間

$L^p(\mathfrak{N},\tau)$ について説明した．忠実な $\varphi\in\mathfrak{N}_{*,+}$（さらに，忠実な半有限正規荷重 φ）に関する非可換 L^p 空間 $L^p(\mathfrak{N},\varphi)$ の理論も何通りかの仕方で完成されており，この $L^p(\mathfrak{N},\varphi)$ との関連でも，いくつかの Radon–Nikodym 型の結果が得られている．しかし，これ以上は立ち入らないことにする．

6.3 条件付期待値と完全正写像

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ において，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の σ-部分集合体とする．任意の $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ に対して，$\mathcal{G}$ 上の（複素数値）測度 ν を $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$ $(A\in\mathcal{G})$ と定めると，$\nu\ll\mu$ となるから，CPT における RN 定理より，RN 微分 $g\in L^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ が μ–a.e. の意味で一意に存在して $\nu(A)=\int_A g\,d\mu$ $(\forall A\in\mathcal{G})$．この g を $E_\mu(f|\mathcal{G})$ と書き，f の $\mathcal{G}$ に関する**条件付期待値**（または $\mathcal{G}$–条件付期待値）という．この条件付期待値は次の性質をもつ（ただし，等式，不等式などは a.e. の意味である）．

1° $E_\mu(\cdot|\mathcal{G}):L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)\to L^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ は線形作用素である．

2° $f\geqq 0$ ならば $E_\mu(f|\mathcal{G})\geqq 0$.

3° $E_\mu(E_\mu(f|\mathcal{G})|\mathcal{G})=E_\mu(f|\mathcal{G})$（射影の性質）．

4° $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$ ならば $E_\mu(E_\mu(f|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)=E_\mu(f|\mathcal{G}_1)$.

5° g が $\mathcal{G}$–可測で $f\in L^1$ かつ $gf\in L^1$ ならば，$E_\mu(gf|\mathcal{G})=gE_\mu(f|\mathcal{G})$.

6° $f\in L^p$（ただし $1\leqq p\leqq\infty$）ならば，$E_\mu(f|\mathcal{G})\in L^p$ であり，$\|E_\mu(f|\mathcal{G})\|_p\leqq\|f\|_p$.

7° $f_n\uparrow f$ ならば $E_\mu(f_n|\mathcal{G})\uparrow E_\mu(f|\mathcal{G})$.

8° $E_\mu(\cdot|\mathcal{G}):L^2(\Omega,\mathcal{F},\mu)\to L^2(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ は Hilbert 空間における射影作用素である．

このように，CPT における条件付期待値は，空間 $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $\mathcal{F}$ の σ-部分集合体 $\mathcal{G}$ に制限した空間 $L^p(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影であった．この条件付期待値は，NPT においてどのように定式化されるであろうか．

6.1 節の議論に従って，NPT を 4 つ組 $(\mathcal{H},\mathfrak{N},\mathcal{P}(\mathfrak{N}),\varphi)$ で記述する．いま，$\mathfrak{M}$ を v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数とするとき，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への非可換の条件付期待値 $\mathcal{E}$ は線形写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ であり，次の（1）〜（9）の条件を満たしてほしい．すなわち，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $B,B_1,B_2\in\mathfrak{M}$ に対して，（1）$\mathcal{E}(B)=$

B；（2）$\mathcal{E}(A^*)=\mathcal{E}(A)^*$；（3）$\mathcal{E}(A^*A)\geqq 0$；（4）$\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$；（5）$\mathcal{E}(A^*A)=0\Longleftrightarrow A=0$；　（6）$\mathcal{E}(B_1AB_2)=B_1\mathcal{E}(A)B_2$；　（7）$\mathcal{E}(A^*A)\geqq\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A)$；（8）$\{A_j\}\subset\mathfrak{N}_+$, $A_j\uparrow A$ ならば $\mathcal{E}(A_j)\uparrow\mathcal{E}(A)$．さらに，正規状態 φ に対して，（9）$\varphi(\mathcal{E}(A))=\varphi(A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．

〈**補題 6.23**〉 φが忠実のとき，線形写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ が条件（1),（3),（6),（9）を満たすならば，（2),（5),（7),（8）も成立する．さらに，（6),（9）を満たす $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ は一意である．

証明　（3）⇒（2）はすぐにわかる．φ が忠実だから，（9）⇒（5）は明らか．

（7）:（1),（2),（3),（6）を使って計算すると，

$$\mathcal{E}(A^*A)-\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}(\{A-\mathcal{E}(A)\}^*\{A-\mathcal{E}(A)\})\geqq 0.$$

（8）: $\{A_j\}\subset\mathfrak{N}_+$, $A_j\uparrow A$ のとき，（3）より $\mathcal{E}(A_j)\uparrow$ かつ $\mathcal{E}(A_j)\leqq\mathcal{E}(A)$．（9）と φ の正規性より，$\varphi(\mathcal{E}(A)-\mathcal{E}(A_j))=\varphi(A-A_j)\to 0$．よって，$\varphi$ が忠実であることより，$\mathcal{E}(A_j)\uparrow\mathcal{E}(A)$ がわかる．

さらに，$\mathcal{E}':\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ も（6),（9）を満たすとすると，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $B\in\mathfrak{M}$ に対して，$\varphi(\mathcal{E}(A)B)=\varphi(AB)=\varphi(\mathcal{E}'(A)B)$．ゆえに，$\varphi$ が忠実だから，$\mathcal{E}(A)=\mathcal{E}'(A)$ となる．∎

［**定義 6.3**］ 上記の条件（1)～（9）を満たす線形写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ への**条件付期待値**という．この $\mathcal{E}$ は，$\varphi,\mathfrak{M}$ のとり方に依存しているので，$(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値といい，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ で表すことが多い．

そこで，第1の問題はこの条件付期待値が存在するかどうかであり，存在する場合，それは CPT において果たしたような重要な役割を NPT においても果たすかどうかが第2の問題となる．この種の問題は，1954年以降 Umegaki によって提起され組織的に調べられ，以後様々な角度から研究されてきている．この節では第1の存在の問題を取りあげ，第2の問題については以下の節でそのいくつかを論じる．

Umegaki は，$\mathfrak{N}$ が σ-有限かつ有限（あるいは半有限）であるとき，任意の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ への条件付期待値が存在することを示した．いま，τ を $\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規トレース状態とするとき，前節で述べたように，τ に関して空間 $L^p(\mathfrak{N},\tau)$ が導入される．特に，$L^1(\mathfrak{N},\tau)$ はノルム $\|A\|_1=\tau(|A|)$ $(A\in\mathfrak{N})$

で $\mathfrak{N}$ を完備化した Banach 空間で $\mathfrak{N}_*$ に同型であり， $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ は内積 $\langle A,B\rangle=\tau(A^*B)$ $(A,B\in\mathfrak{N})$ で $\mathfrak{N}$ を完備化した Hilbert 空間である．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して， $\|A\|_1\leqq\|A\|_2\leqq\|A\|$ が容易にわかる．したがって， $\mathfrak{N}\subset L^2(\mathfrak{N},\tau)\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$．さらに，$\tau$ による $\mathfrak{N}$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\tau,\pi_\tau,x_\tau\}$ は

$$\mathcal{H}_\tau=L^2(\mathfrak{N},\tau),\quad \pi_\tau(A)X=AX\quad(A\in\mathfrak{N},X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)),\quad x_\tau=I$$

で与えられることに注意しよう．

〈定理 6.24〉 上記の $\mathfrak{N},\tau$ において，$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{N}$ の任意の v.N. 部分代数とするとき，$(\tau,\mathfrak{M})$-条件付期待値 $\mathcal{E}$ が一意に存在する．

証明 $A\in\mathfrak{N}_+$ に対して $\tau_A(B)=\tau(AB)$ $(B\in\mathfrak{M})$ とおくと， $\tau_A\in\mathfrak{M}_{*,+}$ であり，$\tau_A(B)=\tau(B^{1/2}AB^{1/2})\leqq\|A\|\tau(B)$ $(\forall B\in\mathfrak{M}_+)$ より $\tau_A\leqq\|A\|(\tau\restriction\mathfrak{M})$ が成立する．したがって，RN 定理（〈定理 6.7〉または〈補題 6.12〉）より，$\tilde{A}\in\mathfrak{M}_+$ が一意に存在して $\|\tilde{A}\|\leqq\|A\|$ かつ $\tau_A(B)=\tau(\tilde{A}B)$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$A_k\in\mathfrak{N}_+$ $(k=1,\cdots,4)$ により $A=(A_1-A_2)+i(A_3-A_4)$ と表し，$\mathcal{E}(A)=(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)+i(\tilde{A}_3-\tilde{A}_4)$ と定める．$\mathcal{E}(A)$ が A の表し方によらないことはすぐにわかる．これで，線形写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ が定まった．この $\mathcal{E}$ が $(\tau,\mathfrak{M})$-条件付期待値となることを示そう．条件（1） $\mathcal{E}(B)=B$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$，（3） $\mathcal{E}(A^*A)\geqq0$，および（9） $\tau(\mathcal{E}(A))=\tau(A)$ は，$\mathcal{E}$ の定義より明らかである．任意の $B,B_1,B_2\in\mathfrak{M}$ に対して，

$$\tau(B_1AB_2B)=\tau(AB_2BB_1)=\tau(\mathcal{E}(A)B_2BB_1)=\tau(B_1\mathcal{E}(A)B_2B)$$

となるから，条件（6）が成立する．したがって〈補題 6.23〉より，（2），（5），（7），（8）も成立する．（7）を使って，

$$\|\mathcal{E}(A)\|^2=\|\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A)\|\leqq\|\mathcal{E}(A^*A)\|\leqq\|A^*A\|=\|A\|^2$$

となるから，条件（4）も示せた．▌

ところで，CPT における条件付期待値は $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ から $L^1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ への射影であったが，上の定理における $\mathcal{E}$ も次のように $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ へ拡張できる．

〈定理 6.25〉 〈定理 6.24〉における条件付期待値 $\mathcal{E}$ は， $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ から $L^1(\mathfrak{M},\tau)$ への射影 $\mathcal{E}$ に一意に拡張できて，$\tau(\mathcal{E}(X)B)=\tau(XB)$ $(\forall X\in L^1(\mathfrak{N},\tau),\forall B\in\mathfrak{M})$．さらに，この射影 $\mathcal{E}$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ 上では閉部分空間 $L^2(\mathfrak{M},\tau)$ への射影作用素に等しい．また，この拡張された $\mathcal{E}:L^1(\mathfrak{N},\tau)\to L^1(\mathfrak{M},\tau)$ も（1）～（8）の性質をもつ（ただし，（4）は $\|\mathcal{E}(X)\|_1\leqq\|X\|_1$）．

証明 まず，$\|\mathcal{E}(A)\|_1\leqq\|A\|_1$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ を証明しよう．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，A の

極分解 $A=W|A|$ と，$\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{M}$ の極分解 $\mathcal{E}(A)=W_1|\mathcal{E}(A)|$ ($W_1\in\mathfrak{M}$) をとる．$V=W_1{}^*W$ とおいて，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}(A)\|_1&=\tau(|\mathcal{E}(A)|)=\tau(W_1{}^*\mathcal{E}(A))=\tau(\mathcal{E}(W_1{}^*A))\\&=\tau(W_1{}^*A)=\tau(V|A|)=\tau(|A|^{1/2}V|A|^{1/2})\\&\leqq\tau(|A|)^{1/2}\tau(|A|^{1/2}V^*V|A|^{1/2})^{1/2}\leqq\tau(|A|)=\|A\|_1.\end{aligned}$$

したがって，$\mathfrak{N}$ が $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ で稠密だから，$\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ は $\mathcal{E}:L^1(\mathfrak{N},\tau)\to L^1(\mathfrak{M},\tau)$ に一意に拡張できて，$\|\mathcal{E}(X)\|_1\leqq\|X\|_1$ ($\forall X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$)．この $\mathcal{E}$ が $L^1(\mathfrak{M},\tau)$ への射影であることはすぐにわかる．任意の $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$\|A_n-X\|_1\to 0$ となる $\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ をとると，$\|\mathcal{E}(A_n)-\mathcal{E}(X)\|_1\to 0$ より

$$\tau(\mathcal{E}(X)B)=\lim_{n\to\infty}\tau(\mathcal{E}(A_n)B)=\lim_{n\to\infty}\tau(A_nB)=\tau(XB),\quad \forall B\in\mathfrak{M}.$$

次に，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\|\mathcal{E}(A)\|_2=\tau(\mathcal{E}(A)^*\mathcal{E}(A))^{1/2}\leqq\tau(\mathcal{E}(A^*A))^{1/2}=\tau(A^*A)^{1/2}=\|A\|_2$$

であるから，$\mathcal{E}(L^2(\mathfrak{N},\tau))\subset L^2(\mathfrak{M},\tau)$ であり，$\|\mathcal{E}(X)\|_2\leqq\|X\|_2$ ($\forall X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$) が成立する．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $B\in\mathfrak{M}$ に対して，$\langle B,\mathcal{E}(A)\rangle=\tau(B^*\mathcal{E}(A))=\tau(B^*A)=\langle B,A\rangle$ となり，$\mathfrak{N},\mathfrak{M}$ がそれぞれ $L^2(\mathfrak{N},\tau),L^2(\mathfrak{M},\tau)$ で稠密だから，$\mathcal{E}$ は $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ から $L^2(\mathfrak{M},\tau)$ への射影作用素であることがわかる．また，$\mathfrak{N}$ の点列で極限をとる議論を使えば，上の $\mathcal{E}:L^1(\mathfrak{N},\tau)\to L^1(\mathfrak{M},\tau)$ も (1)～(8) の性質をもつことが容易に示せる．▌

この $\mathcal{E}:L^1(\mathfrak{N},\tau)\to L^1(\mathfrak{M},\tau)$ も条件付期待値と呼び，$E_\tau(\cdot|\mathfrak{M})$ で表す．

ところで，Tomiyama は，ある C* 代数 $\mathcal{A}$ からその C* 部分代数 $\mathcal{B}$ へのノルムが 1 の射影 $\mathcal{E}$ (i.e., 条件 (1) $\mathcal{E}(B)=B$ ($\forall B\in\mathcal{B}$), (4) $\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$ ($\forall A\in\mathcal{A}$) を満たす線形写像 $\mathcal{E}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$) が条件付期待値の条件 (3), (6), (7) を満たすことを示した．ここでは，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ とその v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ の場合において，この結果を証明しよう（実際は，単位元を含まない C* 代数の場合でも成立する）．

〈**定理 6.26**〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ からその v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ へのノルムが 1 の射影 $\mathcal{E}$ は，条件付期待値の条件 (3), (6), (7) を満たす．

証明 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ の共役写像 $\mathcal{E}^*:\mathfrak{M}^*\to\mathfrak{N}^*$ をとると，任意の $\omega\in\mathfrak{M}^*_+$ に対して，$(\mathcal{E}^*\omega)(I)=\omega(\mathcal{E}(I))=\omega(I)=\|\omega\|\geqq\|\mathcal{E}^*\omega\|$．よって〈定理 3.31〉より，$\mathcal{E}^*\omega\in\mathfrak{N}^*_+$．したがって，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\omega(\mathcal{E}(A^*A))=(\mathcal{E}^*\omega)(A^*A)\geqq 0$ ($\forall\omega\in\mathfrak{M}^*_+$) となるから，$\mathcal{E}(A^*A)\geqq 0$．これで (3) が示せた．よって (2) も成立する．$\mathcal{P}(\mathfrak{M})$ によって張られる部分空間が $\mathfrak{M}$ でノルム稠密であるから，(6) を示すには，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $P\in\mathcal{P}(\mathfrak{M})$ に対して $\mathcal{E}(PA)=P\mathcal{E}(A)$ および $\mathcal{E}(AP)=\mathcal{E}(A)P$ を証明すればよい．$P\in\mathcal{P}(\mathfrak{M})$ のとき，任意の $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$(1+\lambda)^2\|P^\perp\mathcal{E}(PA)\|^2=\|P^\perp\mathcal{E}(PA)+\lambda P^\perp\mathcal{E}(PA)\|^2=\|P^\perp\mathcal{E}(PA+\lambda P^\perp\mathcal{E}(PA))\|^2$$
$$\leqq\|PA+\lambda P^\perp\mathcal{E}(PA)\|^2$$
$$=\|\{A^*P+\lambda\mathcal{E}(PA)^*P^\perp\}\{PA+\lambda P^\perp\mathcal{E}(PA)\}\|$$
$$=\|A^*PA+\lambda^2\mathcal{E}(PA)^*P^\perp\mathcal{E}(PA)\|$$
$$\leqq\|PA\|^2+\lambda^2\|P^\perp\mathcal{E}(PA)\|^2.$$

したがって $P^\perp\mathcal{E}(PA)=0$ となり，$\mathcal{E}(PA)=P\mathcal{E}(PA)$ を得る．同様に $P\mathcal{E}(P^\perp A)=0$ となり，$P\mathcal{E}(A)=P\mathcal{E}(PA)$．ゆえに $\mathcal{E}(PA)=P\mathcal{E}(A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．この両辺の対合をとると，$\mathcal{E}(AP)=\mathcal{E}(A)P$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ も成立する．これで（6）が示せた．最後に（7）は，〈補題 6.23〉の証明と同様に簡単な計算で示せる．▌

〈補題 6.23〉と〈定理 6.26〉より，φ が忠実のとき，条件（1），（4），（9）を満たす $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ は $(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値であることが結論される．

Takesaki は，一般の v.N. 代数において条件付期待値が存在するための必要十分条件を与えた．

〈定理 6.27〉 v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 φ に対して，$(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値が（一意に）存在することは，$\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ が成立することと同値である．

証明 φ による $\mathfrak{N}$ の GNS 表現をとればよいから，$\mathfrak{N}$ に関する巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0,Ax_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ と書けるとしてよい．φ に関するモジュラー作用素 Δ，モジュラー共役作用素 J をとり，$S=J\Delta^{1/2}$ とする．$\mathcal{H}_1=\{\mathfrak{M}x_0\}^-$ とおき，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_1$ への射影作用素を P とすると，〈補題 3.21〉より $P\in\mathfrak{M}'$．さらに，$\varphi_1=\varphi\upharpoonright\mathfrak{M}$ とおくと，x_0 が $\mathfrak{M}_P\equiv\mathfrak{M}\upharpoonright\mathcal{H}_1(\simeq\mathfrak{M})$ に関する巡回かつ分離ベクトルであるから，φ_1 に関するモジュラー作用素 Δ_1，モジュラー共役作用素 J_1 は $\mathcal{H}_1$ 上の作用素である．

$\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ とすると，モジュラー自己同型群の一意性（〈定理 5.23〉）より，$\sigma_t^{\varphi_1}=\sigma_t^\varphi\upharpoonright\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．よって，任意の $A\in\mathfrak{M}$ に対して，

$$\Delta^{it}Ax_0=\Delta^{it}A\Delta^{-it}x_0=\sigma_t^\varphi(A)x_0=\sigma_t^{\varphi_1}(A)x_0=\Delta_1^{it}Ax_0$$

であるから，$\Delta_1^{it}=\Delta^{it}\upharpoonright\mathcal{H}_1$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ となり，$\Delta_1=\Delta\upharpoonright\mathcal{H}$．さらに，

$$J_1\Delta_1^{1/2}Ax_0=A^*x_0=J\Delta^{1/2}Ax_0=J\Delta_1^{1/2}Ax_0,\quad \forall A\in\mathfrak{M}$$

であるから，$J_1=J\upharpoonright\mathcal{H}_1$ かつ $JP=PJ$．いま，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$x_A=PJAx_0\in\mathcal{H}_1$ とおくと，$P\in\mathfrak{M}'$，$JAJ\in\mathfrak{N}'$ より

$$\|Bx_A\|=\|PBJAJx_0\|=\|PJAJBx_0\|\leqq\|A\|\|Bx_0\|,\quad \forall B\in\mathfrak{M}.$$

よって，$A'\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_1)$ が存在して，$\|A'\|\leqq\|A\|$ かつ $A'(Bx_0)=Bx_A$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$．このとき，$A'\in(\mathfrak{M}_P)'$ がすぐにわかる．$x_A=A'x_0$ だから，

$$PAx_0=J_1^2PAx_0=J_1PJAx_0=J_1x_A=J_1A'x_0=J_1A'J_1x_0.$$

$\mathfrak{M}_P$ に対する Tomita の基本定理より，$J_1A'J_1\in J_1(\mathfrak{M}_P)'J_1=\mathfrak{M}_P$．よって $\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{M}$ が

存在して $J_1A'J_1=\mathcal{E}(A)\upharpoonright\mathcal{H}_1$ となり，$\|\mathcal{E}(A)\|=\|A'\|\leqq\|A\|$ かつ $PAx_0=\mathcal{E}(A)x_0$．x_0 が分離ベクトルだから，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\mathcal{E}(A)x_0=PAx_0$ により $\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{M}$ は一意に定まる．ゆえに $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ は線形写像であり，$\mathcal{E}(B)=B$ $(\forall B\in\mathfrak{M})$．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\varphi(\mathcal{E}(A))=\langle x_0,\mathcal{E}(A)x_0\rangle=\langle x_0,PAx_0\rangle=\langle x_0,Ax_0\rangle=\varphi(A).$$

したがって，この $\mathcal{E}$ は $(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値となる．

逆に，$(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値 $\mathcal{E}$ が存在するならば，任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $B\in\mathfrak{M}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle Bx_0,\mathcal{E}(A)x_0\rangle&=\varphi(B^*\mathcal{E}(A))=\varphi(B^*A)=\langle Bx_0,Ax_0\rangle\\&=\langle PBx_0,Ax_0\rangle=\langle Bx_0,PAx_0\rangle.\end{aligned}$$

よって $\mathcal{E}(A)x_0=PAx_0$ となり，さらに，

$$PSAx_0=PA^*x_0=\mathcal{E}(A^*)x_0=S\mathcal{E}(A)x_0=SPAx_0,\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

したがって $PS\subset SP$ が成立する．このとき，$(I-2P)S\subset S(I-2P)$ となるが，$I-2P$ は自己共役なユニタリー作用素であるから，$(I-2P)S=S(I-2P)$ かつ $S^*(I-2P)=(I-2P)S^*$ が成立する．$S^*S=\Delta$ だから，$\Delta=(I-2P)\Delta(I-2P)$．ゆえに $\Delta^{it}=(I-2P)\Delta^{it}(I-2P)$ となり，$\Delta^{it}P=P\Delta^{it}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．任意の $B\in\mathfrak{M}$ に対して，

$$\sigma_t^{\varphi}(B)x_0=\Delta^{it}Bx_0=\Delta^{it}PBx_0=P\Delta^{it}Bx_0=P\sigma_t^{\varphi}(B)x_0=\mathcal{E}(\sigma_t^{\varphi}(B))x_0.$$

x_0 が分離ベクトルだから，$\sigma_t^{\varphi}(B)=\mathcal{E}(\sigma_t^{\varphi}(B))\in\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．したがって $\sigma_t^{\varphi}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$．∎

この定理からわかるように，NPT においては，条件付期待値は存在するとは限らないのである．しかし，φ がトレース状態であれば (CPT では常にそうなっている)，$\sigma_t^{\varphi}=1$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ だから，任意の v.N. 部分代数への条件付期待値が存在することがわかる．つまり，〈定理 6.27〉は〈定理 6.24〉の拡張になっている．

次に，完全正写像について論じよう．完全正写像は，条件付期待値の一般化と見ることもできるが，それ以上に，物理系などの力学的変化を考える際に有用な概念となっている．

いま，$(\mathcal{A},\mathfrak{S}(\mathcal{A}),\alpha)$，$(\mathcal{B},\mathfrak{S}(\mathcal{B}),\beta)$ を 2 つの C* 力学系とし，この 2 つの力学系の間の変換 $\Lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を考えると，物理的な要請から当然 Λ は $\mathcal{A}$ の正の元を $\mathcal{B}$ の正の元に写す写像（**正写像**）であることが要求されるが，これは量子系を考察の対象とする場合は満足のいくものではない．例えば，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で記述されるある力学系と自由度 n の粒子系を考えると，これら 2 つの系の合成系の Hilbert 空間は $\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n$ であり，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n)\simeq\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\otimes M_n$ (M_n は $n\times n$ 複素行列の全体) となる．$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})\otimes M_n$ の任意の元は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元

を成分とする $n\times n$ 行列 (A_{ij}) で表せるが，Λ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上で正写像であっても，$(A_{ij})\mapsto(\Lambda(A_{ij}))$ が正写像になるとは限らない．この困難を取り除くために，完全正写像の概念が必要となるのである．

ところで，C* 代数 $\mathcal{A}$ の元を成分とする $n\times n$ 行列の全体を $M_n(\mathcal{A})$ で表す．この $M_n(\mathcal{A})$ は通常の行列の演算で * 代数となる．$\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{H},\pi\}$ をとり，$\tilde{A}=(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})$ に対して，$\tilde{\pi}(\tilde{A})\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n)$ を $\tilde{\pi}(\tilde{A})(x\otimes e_j)=\sum_{i=1}^{n}\pi(A_{ij})x\otimes e_i$ ($x\in\mathcal{H}$；ただし，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ は $\boldsymbol{C}^n$ の CONS) で定めると，$\{\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n,\tilde{\pi}\}$ は $M_n(\mathcal{A})$ の表現となる．さらに，π が忠実のとき，$\tilde{\pi}$ も忠実となり，$\max\{\|A_{ij}\|\,;\,1\leqq i,j\leqq n\}\leqq\|\tilde{\pi}(\tilde{A})\|\leqq\left(\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ij}\|^2\right)^{1/2}$ が成立する．よって $\tilde{\pi}(M_n(\mathcal{A}))$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n)$ の一様位相で閉じている．したがって $M_n(\mathcal{A})$ はノルム $\|\tilde{A}\|=\|\tilde{\pi}(\tilde{A})\|$ に関して C* 代数となる．また，(i,j) 成分が 1 で他の成分がすべて 0 である M_n の元を E_{ij} とおくと，写像 $(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})\mapsto\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\otimes E_{ij}\in\mathcal{A}\otimes M_n$ は * 同型写像であることがわかる．すなわち，C* 代数 $M_n(\mathcal{A})$ は C* テンソル積 $\mathcal{A}\otimes M_n$ と自然に同一視できる．

以下，C* 代数 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ は単位元を含むとするが，この仮定は本質的なものではない．

[定義 6.4] 線形写像 $\Lambda:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ が ***n*-正** (n-positive) であるとは，任意の $\tilde{A}=(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})_+$ に対して $\Lambda_n(\tilde{A})\equiv(\Lambda(A_{ij}))\in M_n(\mathcal{B})_+$ のときをいう．Λ がすべての $n\in\boldsymbol{N}$ に対して n-正であるとき，Λ を**完全正写像**という．

以下，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への正写像の全体を $P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表し，完全正写像の全体を $CP(\mathcal{A},\mathcal{B})$ で表す．

〈補題 6.28〉 $\tilde{A}=(A_{ij})\in M_n(\mathcal{A})$ に対して，次が成立する．

(1) $\tilde{A}\geqq 0$ であることは，$\tilde{A}$ が $(A_i{}^*A_j)_{i,j=1}^{n}$ ($A_i\in\mathcal{A}$) の形の行列の和で表せることと同値である．

(2) $\tilde{A}\geqq 0$ であることは，任意の $Q_i\in\mathcal{A}$ ($i=1,2,\cdots,n$) に対して $\sum_{i,j=1}^{n}Q_i{}^*A_{ij}Q_j\geqq 0$ であることと同値である．

証明 (1)：$\tilde{A}\geqq 0$ であるとき，$\tilde{B}=(B_{ij})\in M_n(\mathcal{A})$ が存在して，$\tilde{A}=\tilde{B}^*\tilde{B}=(\sum_k B_{ki}{}^*$

$B_{kj})=\sum_k (B_{ki}{}^*B_{kj})$．逆は明らか．

（2）：$A_{ij}=A_i{}^*A_j$ のとき，$\sum_{i,j=1}^n Q_i{}^*A_{ij}Q_j{}^*=\left(\sum_{i=1}^n A_iQ_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^n A_jQ_j\right)\geqq 0$．よって(1)より，$\tilde{A}\geqq 0$ ならば $\sum_{i,j=1}^n Q_i{}^*A_{ij}Q_j\geqq 0$．逆に，$\sum_{i,j=1}^n Q_i{}^*A_{ij}Q_j\geqq 0$ $(\forall Q_i\in\mathcal{A})$ とする．$\mathcal{A}$ の忠実表現は巡回表現の直和 $\bigoplus_k \pi_k$ で表せるが，このとき $\bigoplus_k \tilde{\pi}_k$ は $M_n(\mathcal{A})$ の忠実表現となる．よって，$\tilde{A}\geqq 0$ を示すには，$\mathcal{A}$ の任意の巡回表現 $\{\mathcal{H},\pi,x_0\}$ に対して，$\tilde{\pi}(\tilde{A})\geqq 0$ を示せばよい．任意の $\tilde{x}=\sum_{i=1}^n \pi(Q_i)x_0\otimes e_i$ $(Q_i\in\mathcal{A})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\tilde{x},\tilde{\pi}(\tilde{A})\tilde{x}\rangle&=\sum_{i,j=1}^n\langle\pi(Q_i)x_0\otimes e_i,\tilde{\pi}(\tilde{A})(\pi(Q_j)x_0\otimes e_j)\rangle\\&=\sum_{i,j,k=1}^n\langle\pi(Q_i)x_0\otimes e_i,\pi(A_{kj})\pi(Q_j)x_0\otimes e_k\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^n\langle\pi(Q_i)x_0,\pi(A_{ij}Q_j)x_0\rangle=\left\langle x_0,\pi\left(\sum_{i,j=1}^n Q_i{}^*A_{ij}Q_j\right)x_0\right\rangle\geqq 0.\end{aligned}$$

$\{\pi(\mathcal{A})x_0\}^-=\mathcal{H}$ より，上のような $\tilde{x}$ の全体は $\mathcal{H}\otimes\boldsymbol{C}^n$ で稠密である．ゆえに $\tilde{\pi}(\tilde{A})\geqq 0$ となり，$\tilde{A}\geqq 0$ が示せた．▌

この補題より，$\Lambda\in CP(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であることは，任意の $n\in\boldsymbol{N}$，$A_i\in\mathcal{A}$，$B_i\in\mathcal{B}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して $\sum_{i,j=1}^n B_i{}^*\Lambda(A_i{}^*A_j)B_j\geqq 0$ であることと同値であることがわかる．

定義より，$\Lambda\in CP(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ならば常に $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ であるが，逆に関しては次が成立する．

〈定理 6.29〉 $\mathcal{A}$ または $\mathcal{B}$ の少なくとも一方が可換なとき，$\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ならば $\Lambda\in CP(\mathcal{A},\mathcal{B})$ である．

証明　まず，$\mathcal{A}$ が可換の場合で証明する．このとき，Gelfand-Naimark の表現定理より，コンパクト Hausdorff 空間 Ω を使って $\mathcal{A}=C(\Omega)$ と表せる．$\mathcal{B}$ をある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の C* 代数とみなすと，任意の $f_i\in C(\Omega)$, $x_i\in\mathcal{H}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，$\sum_{i,j=1}^n\langle x_i,\Lambda(\bar{f}_if_j)x_j\rangle\geqq 0$ を示せばよい．$\mu_{ij}\in M(\Omega)$ を $\langle x_i,\Lambda(f)x_j\rangle=\int_\Omega f\,d\mu_{ij}$ $(\forall f\in C(\Omega))$ で定め，$\mu_{ij}\ll\mu$ $(\forall i,j)$ となる $\mu\in M(\Omega)_+$ をとる．Radon-Nikodym 微分 $\xi_{ij}=d\mu_{ij}/d\mu\in L^1(\Omega,\mu)$ をとると，$\langle x_i,\Lambda(f)x_i\rangle=\int_\Omega f\xi_{ij}d\mu$ $(\forall f\in C(\Omega))$．任意の $\lambda_i\in\boldsymbol{C}$ $(i=1,\cdots,n)$ に対して，$\sum_{i,j=1}^n\bar{\lambda}_i\lambda_j\mu_{ij}\geqq 0$ より $\sum_{i,j=1}^n\bar{\lambda}_i\lambda_j\xi_{ij}(\omega)\geqq 0$ (μ-a. e.)．したがって $\sum_{i,j=1}^n\overline{f_i(\omega)}f_j(\omega)\xi_{ij}(\omega)\geqq 0$ (μ-a. e.) となるから，

$$\sum_{i,j=1}^n\langle x_i,\Lambda(\bar{f}_if_j)x_j\rangle=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\overline{f_i(\omega)}f_j(\omega)\xi_{ij}(\omega)d\mu(\omega)\geqq 0.$$

次に $\mathcal{B}$ が可換のときは，$\mathcal{B}=C(\Omega)$ と表せるから，任意の $A_i\in\mathcal{A}$，$g_i\in C(\Omega)$ ($i=1,2,\cdots,n$) と $\omega\in\Omega$ に対して，

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\bar{g}_i\Lambda(A_i{}^*A_j)g_j\right)(\omega)=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{g_i(\omega)}\Lambda(A_i{}^*A_j)(\omega)g_j(\omega)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\Lambda(\overline{g_i(\omega)}g_j(\omega)A_i{}^*A_j)(\omega)$$
$$=\Lambda\left(\left(\sum_{i=1}^{n}g_i(\omega)A_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^{n}g_j(\omega)A_j\right)\right)(\omega)\geqq 0. \quad \blacksquare$$

この定理より，$\mathcal{A}$ 上の正の線形汎函数 φ (i.e., $\varphi\in\mathcal{A}_+^*$) は $\mathcal{A}$ から $\boldsymbol{C}$ への完全正写像であることがわかる．

$\mathcal{H}$ をある Hilbert 空間とし，$\{\mathcal{K},\pi\}$ を $\mathcal{A}$ の表現とする．有界線形作用素 $V:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ を用いて，$\Lambda:\mathcal{A}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ を $\Lambda(A)=V^*\pi(A)V$ ($A\in\mathcal{A}$) と定めると，任意の $n\in\boldsymbol{N}$，$A_i\in\mathcal{A}$，$B_i\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^{n}B_i{}^*\Lambda(A_i{}^*A_j)B_j=\left(\sum_{i=1}^{n}\pi(A_i)VB_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^{n}\pi(A_j)VB_j\right)\geqq 0$$

が成立するから，Λ は完全正写像となる．この逆は，次の Stinespring の表現定理によって答えられている．

〈定理 6.30〉 Stinespring の表現定理：任意の $\Lambda\in CP(\mathcal{A},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ に対して，$\mathcal{A}$ の表現 $\{\mathcal{K},\pi\}$ と $V\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ が存在して $\Lambda(A)=V^*\pi(A)V$ ($\forall A\in\mathcal{A}$) かつ $[\![\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}]\!]=\mathcal{K}$．さらに，この3つ組 $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ はユニタリー同値性を除いて一意である．また，$\Lambda(I)=I$ のとき，V は等距離作用素である．(3つ組 $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ を Λ の **Stinespring 表現**という．)

証明 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{H}$ の代数的テンソル積 $\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ の任意の元 $\tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}A_i\otimes x_i$，$\tilde{y}=\sum_{j=1}^{m}B_j\otimes y_j$ に対して，

$$\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i,\Lambda(A_i{}^*B_j)y_j\rangle$$

と定めると，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ 上の双線形汎函数であり，$\langle\tilde{x},\tilde{x}\rangle\geqq 0$ ($\forall\tilde{x}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$) を満たす．$\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{N}=\{\tilde{y}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}\,;\,\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle=0,\ \forall\tilde{x}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}\}$ による商線形空間 $\mathcal{A}\odot\mathcal{H}/\mathcal{N}$ をとる．このとき，$\mathcal{A}\odot\mathcal{H}/\mathcal{N}$ 上の内積を $\langle[\tilde{x}],[\tilde{y}]\rangle=\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle$ ($[\tilde{x}]=\tilde{x}+\mathcal{N}$，$[\tilde{y}]=\tilde{y}+\mathcal{N}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}/\mathcal{N}$) で定めることができる．$\mathcal{A}\odot\mathcal{H}/\mathcal{N}$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で完備化して得られる Hilbert 空間を $\mathcal{K}$ とする．

さて，任意の $Q\in\mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ 上の作用素 $\pi_0(Q)$ を

$$\pi_0(Q)\tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}QA_i\otimes x_i,\quad \tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}A_i\otimes x_i\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$$

で定める．このとき，

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix} Q & & 0 \\ & Q & \\ & & \ddots \\ 0 & & Q \end{pmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}\in M_n(\mathcal{A})$$

とおくと，$\Lambda_n : M_n(\mathcal{A})\to M_n(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes \boldsymbol{C}^n)$ が正写像だから，

$$\begin{aligned}\langle \pi_0(Q)\tilde{x}, \pi_0(Q)\tilde{x}\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle x_i, \Lambda(A_i^*Q^*QA_j)x_j\rangle \\ &=\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes e_i, \Lambda_n(\tilde{A}^*\tilde{Q}^*\tilde{Q}\tilde{A})\sum_{j=1}^{n} x_j\otimes e_j\right\rangle \\ &\leqq \|\tilde{Q}\|^2\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes e_i, \Lambda_n(\tilde{A}^*\tilde{A})\sum_{j=1}^{n} x_j\otimes e_j\right\rangle=\|Q\|^2\langle\tilde{x},\tilde{x}\rangle.\end{aligned}$$

また，$\langle\tilde{x},\pi_0(Q)\tilde{y}\rangle=\langle\pi_0(Q^*)\tilde{x},\tilde{y}\rangle$ $(\forall\tilde{x},\tilde{y}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H})$ も成立する．そこで，$\pi(Q)\in\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ を $\pi(Q)[\tilde{x}]=[\pi_0(Q)\tilde{x}]$ $(\tilde{x}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H})$ で定義することができる．$Q\longmapsto\pi_0(Q)$ の線形性より，$\pi:\mathcal{A}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ は線形写像である．$\pi_0(Q_1Q_2)=\pi_0(Q_1)\pi_0(Q_2)$ より，$\pi(Q_1Q_2)=\pi(Q_1)\pi(Q_2)$．さらに，

$$\langle[\tilde{x}],\pi(Q)[\tilde{y}]\rangle=\langle\tilde{x},\pi_0(Q)\tilde{y}\rangle=\langle\pi_0(Q^*)\tilde{x},\tilde{y}\rangle=\langle\pi(Q^*)[\tilde{x}],[\tilde{y}]\rangle$$

より，$\pi(Q^*)=\pi(Q)^*$．これで，$\{\mathcal{K},\pi\}$ は $\mathcal{A}$ の表現となることがわかった．

ここで，$Vx=[I\otimes x]$ $(x\in\mathcal{H})$ とおくと，$\|Vx\|^2=\langle I\otimes x, I\otimes x\rangle=\langle x,\Lambda(I)x\rangle\leqq\|\Lambda(I)\|\|x\|^2$ より，$V\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$．任意の $A\in\mathcal{A}$, $x,y\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\langle Vy,[A\otimes x]\rangle=\langle I\otimes y, A\otimes x\rangle=\langle y,\Lambda(A)x\rangle$$

となるから，$V^*[A\otimes x]=\Lambda(A)x$．したがって，

$$V^*\pi(A)Vx=V^*\pi(A)[I\otimes x]=V^*[A\otimes x]=\Lambda(A)x$$

が成立し，$\Lambda(A)=V^*\pi(A)V$ $(\forall A\in\mathcal{A})$．また，$\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}=\{[A\otimes x]\,;\,A\in\mathcal{A}, x\in\mathcal{H}\}$ より，$[\![\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}]\!]=\mathcal{K}$．

いま，3つ組 $\{\mathcal{K}',\pi',V'\}$ も $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ と同じ条件を満たすとすると，任意の $A_i, B_j\in\mathcal{A}$, $x_i, y_j\in\mathcal{H}$ $(i=1,\cdots,n\,;\,j=1,\cdots,m)$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\pi'(A_i)V'x_i,\ \sum_{j=1}^{m}\pi'(B_j)V'y_j\right\rangle &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, V'^*\pi'(A_i^*B_j)V'y_j\rangle \\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i,\Lambda(A_i^*B_j)x_j\rangle \\ &=\langle\sum_{i=1}^{n}\pi(A_i)Vx_i,\ \sum_{j=1}^{m}\pi(B_j)Vy_j\rangle.\end{aligned}$$

よって，$[\![\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}]\!]=\mathcal{K}$, $[\![\pi'(\mathcal{A})V'\mathcal{H}]\!]=\mathcal{K}'$ より，$\mathcal{K}$ から $\mathcal{K}'$ へのユニタリー作用素 U が存在して $U\left(\sum_{i=1}^{n}\pi(A_i)Vx_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\pi'(A_i)V'x_i$．このとき，$U\pi(A)U^*=\pi'(A)$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ かつ $UV=V'$ が成立する．つまり，$\{\mathcal{K}',\pi',V'\}$ と $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ はユニタリー同値である．

最後に，$\Lambda(I)=I$ のとき，$V^*V=V^*\pi(I)V=\Lambda(I)=I$ となり，V は等距離作用素になる．∎

この定理より，次の Schwarz 型の不等式 (Kadison の不等式ともいう) が示される．

〈**系 6.31**〉 $\Lambda\in CP(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ならば，Λ は有界で $\|\Lambda\|=\|\Lambda(I)\|$ であり，$\Lambda(A)^*\Lambda(A)\leqq\|\Lambda\|\Lambda(A^*A)$ $(\forall A\in\mathcal{A})$．

証明 $\mathcal{B}$ をある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の C* 代数 (i. e., $\mathcal{B}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$) とみなしてよいから，〈定理 6. 30〉の $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ を使って，$\Lambda(A)=V^*\pi(A)V$ と表せる．このとき，$\|\Lambda(A)\|\leqq\|V\|^2\|\pi(A)\|\leqq\|V\|^2\|A\|$ より，$\|\Lambda\|\leqq\|V\|^2$．また，$\|V\|^2=\|\Lambda(I)\|\leqq\|\Lambda\|$．よって $\|\Lambda\|=\|V\|^2=\|\Lambda(I)\|$．さらに，任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して，

$$\Lambda(A)^*\Lambda(A)=V^*\pi(A)^*VV^*\pi(A)V\leqq\|V\|^2V^*\pi(A^*A)V=\|\Lambda\|\Lambda(A^*A). \quad ▌$$

特に，$\Lambda(I)=I$ のときは，$\|\Lambda\|=1$ で，$\Lambda(A)^*\Lambda(A)\leqq\Lambda(A^*A)$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ が成立する．

ここで，$\Lambda\in\boldsymbol{B}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ に関して，〈定理 3. 30〉と〈定理 3. 31〉に類似な結果を示そう．その前に，有用な補題をひとつ与える．3. 2 節末の 3° によれば，$\mathcal{A}$ に属するユニタリーはすべて $\mathcal{A}_1\equiv\{A\in\mathcal{A}\,;\,\|A\|\leqq1\}$ の端点であるが，さらに，

〈**補題 6. 32**〉 $\mathcal{A}_1$ は $\mathcal{A}$ に属するユニタリー全体のノルム閉凸包である．

証明 $A\in\mathcal{A}$, $\|A\|<1$ のとき，$I-AA^*$ は可逆であり，$f(A,z)=(I-AA^*)^{-1/2}(I+zA)\in\mathcal{A}$ は，任意の $z\in\boldsymbol{C}$, $|z|=1$ に対して可逆である．

$$A^*(I-AA^*)^{-1}=A^*\sum_{n=0}^{\infty}(AA^*)^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(A^*A)^n\right)A^*=(I-A^*A)^{-1}A^*$$

であるから，

$$\begin{aligned}f(A,z)^*f(A,z)+I&=(I+\bar{z}A^*)(I-AA^*)^{-1}(I+zA)+I\\&=(I-AA^*)^{-1}+(I-A^*A)^{-1}\bar{z}A^*+(I-AA^*)^{-1}zA+(I-A^*A)^{-1}.\end{aligned}$$

この式は A,z をそれぞれ $A^*,\bar{z}$ で置き換えても同じであるから，$f(A,z)^*f(A,z)=f(A^*,\bar{z})^*f(A^*,\bar{z})$．したがって $U_z=f(A,z)f(A^*,\bar{z})^{-1}$ $(|z|=1)$ はユニタリーとなる．さらに，

$$U(z)=(I-AA^*)^{-1/2}(zI+A)(I+zA^*)^{-1}(I-A^*A)^{1/2}$$

は $|z|\leqq1$ の近傍で解析的であり，$|z|=1$ のとき $U(z)=zU_{\bar{z}}$．また，$(I-A^*A)^{1/2}$ を A^*A の多項式で近似して計算すれば，

$$U(0)=(I-AA^*)^{-1/2}A(I-A^*A)^{1/2}=(I-AA^*)^{-1/2}(I-AA^*)^{1/2}A=A.$$

ゆえに Cauchy の積分公式より，$A=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}U(e^{i\theta})d\theta$ を得る．したがって A は $\mathcal{A}$ に属するユニタリーの凸結合でノルム近似できる．これで補題が示せた． ▌

〈**定理 6.33**〉 (1) $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ は有界である.

(2) $\Lambda\in\boldsymbol{B}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ が $\Lambda(I)=I$ を満たすとき, $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と $\|\Lambda\|=1$ は同値である.

証明 (1) $A\in\mathcal{A}_{sa}$ のとき, $-\|A\|I\leqq A\leqq\|A\|I$ だから, $-\|A\|\Lambda(I)\leqq\Lambda(A)\leqq\|A\|\Lambda(I)$ となり, $\|\Lambda(A)\|\leqq\|\Lambda(I)\|\|A\|$. 一般の $A\in\mathcal{A}$ に対しては, $A_1=\dfrac{1}{2}(A+A^*)$, $A_2=\dfrac{1}{2i}(A-A^*)$ とおいて, $\|\Lambda(A)\|=\|\Lambda(A_1)\|+\|\Lambda(A_2)\|\leqq2\|\Lambda(I)\|\|A\|$.

(2) $\|\Lambda\|=1$ のとき, Λ の共役写像 $\Lambda^*\in\boldsymbol{B}(\mathcal{B}^*,\mathcal{A}^*)$ をとれば, 任意の $\omega\in\mathcal{B}^*_+$ に対して $(\Lambda^*\omega)(I)=\omega(\Lambda(I))=\omega(I)=\|\omega\|\geqq\|\Lambda^*\omega\|$. よって〈定理 3.31〉より, $\Lambda^*\omega\in\mathcal{A}^*_+$. したがって, 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して, $\omega(\Lambda(A^*A))=(\Lambda^*\omega)(A^*A)\geqq0$ $(\forall\omega\in\mathcal{B}^*_+)$ となるから, $\Lambda(A^*A)\geqq0$. 逆に, $\Lambda\in P(\mathcal{A},\mathcal{B})$ とする. 任意のユニタリー $U\in\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ の可換 C* 部分代数 $[\![I,U]\!]$ 上に Λ を制限すれば, 〈定理 6.29〉と〈系 6.31〉より

$$\Lambda(U)^*\Lambda(U)\leqq\|\Lambda(I)\|\Lambda(U^*U)=\|\Lambda(I)\|\Lambda(I)=I.$$

よって $\|\Lambda(U)\|\leqq1$. したがって〈補題 6.32〉より, $\|\Lambda\|=1$ を得る. ▌

〈**定理 6.34**〉 $\mathfrak{R}$ が v.N. 代数で, $\Lambda\in CP(\mathfrak{R},\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ が正規 (i.e., $\{A_j\}\subset\mathfrak{R}_+$, $A_j\uparrow A$ ならば $\Lambda(A_j)\uparrow\Lambda(A)$) なとき, 〈定理 6.30〉の表現 π も正規である.

証明 任意の $A,B,C\in\mathfrak{R}$ に対して, 次の偏極化が成立する:

$$\begin{aligned}\Lambda(B^*AC)=\frac{1}{4}\{&\Lambda((B+C)^*A(B+C))-\Lambda((B-C)^*A(B-C))\\&+i\Lambda((iB+C)^*A(iB+C))-i\Lambda((iB-C)^*A(iB-C))\}.\end{aligned}$$

$\{A_j\}\subset\mathfrak{R}_+$, $A_j\uparrow A$ のとき, 任意の $B\in\mathfrak{R}$ に対して, $B^*A_jB\uparrow B^*AB$ となり, Λ の正規性より $\Lambda(B^*A_jB)\uparrow\Lambda(B^*AB)$. よって, 上の偏極化を使うと, $\Lambda(B^*A_jC)\xrightarrow{us}\Lambda(B^*AC)$ $(\forall B,C\in\mathfrak{R})$. したがって, 任意の $\tilde{x}=\sum_{k=1}^{n}B_k\otimes x_k\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle[\tilde{x}],\pi(A_j)[\tilde{x}]\rangle&=\sum_{k,l=1}^{n}\langle x_k,\Lambda(B_k{}^*A_jB_l)x_l\rangle\\&\to\sum_{k,l=1}^{n}\langle x_k,\Lambda(B_k{}^*AB_l)x_l\rangle=\langle[\tilde{x}],\pi(A)[\tilde{x}]\rangle.\end{aligned}$$

$\mathcal{A}\odot\mathcal{H}/\mathcal{N}$ が $\mathcal{K}$ で稠密だから, $\pi(A_j)\uparrow\pi(A)$ となる. ▌

〈**定理 6.35**〉 正規な $\Lambda\in CP(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ $(\equiv CP(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),\boldsymbol{B}(\mathcal{H})))$ に対して, $\{W_j\,;\,j\in J\}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が存在して $\Lambda(A)=\sum_{j\in J}W_j{}^*AW_j$ $(\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$.

証明 Λ の Stinespring 表現を $\{\mathcal{K},\pi,V\}$ とすると, Λ が正規だから, 〈定理 6.34〉

より π も正規である．$\pi(I)=I$ より，ある $x\in\mathcal{H}$, $\|x\|=1$ が存在して $\pi(P_x)\neq 0$（ただし $P_x=x\otimes\bar{x}$）．$\pi(P_x)y=y$, $\|y\|=1$ となる $y\in\mathcal{K}$ をとると，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して，$P_xAP_x=\langle x, Ax\rangle P_x$ だから，

$$\langle y, \pi(A)y\rangle=\langle y, \pi(P_xAP_x)y\rangle=\langle x, Ax\rangle\langle y, \pi(P_x)y\rangle=\langle x, Ax\rangle.$$

ゆえに，$\mathcal{K}_1=\{\pi(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))y\}^-$ とおくと，〈定理 3.34〉より，π の巡回部分表現 $\pi\restriction\mathcal{K}_1$ は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の $\mathcal{H}$ 上の恒等表現（x を巡回ベクトルとする巡回表現）にユニタリー同値である．つまり，ユニタリー作用素 $U_1:\mathcal{K}_1\to\mathcal{H}$ が存在して $\pi(A)\restriction\mathcal{K}_1=U_1{}^*AU_1$（$\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$）．いま，$\{\mathcal{K}_j;\ j\in J\}$ を各 $\pi\restriction\mathcal{K}_j$ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の恒等表現とユニタリー同値になる互いに直交する $\mathcal{K}$ の不変部分空間の極大族（この存在は Zorn の補題による）とする．上の議論と $\{\mathcal{K}_j;\ j\in J\}$ の極大性から，$\mathcal{K}=\bigoplus_{j\in J}\mathcal{K}_j$ が成立する．各 $j\in J$ に対して，ユニタリー作用素 $U_j:\mathcal{K}_j\to\mathcal{H}$ が存在して $\pi(A)\restriction\mathcal{K}_j=U_j{}^*AU_j$（$\forall A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$）．また，$\mathcal{K}$ から $\mathcal{K}_j$ への射影作用素を E_j とすると，$\sum_{j\in J}E_j=I$ であり，〈補題 3.21〉より $E_j\in\pi(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}))'$ である．ここで，$W_j=U_jE_jV\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ とおくと，任意の $A\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\begin{aligned}\Lambda(A)=V^*\pi(A)V&=\sum_{j\in J}V^*\pi(A)E_jV=\sum_{j\in J}V^*E_j\pi(A)E_jV\\&=\sum_{j\in J}V^*E_jU_j{}^*AU_jE_jV=\sum_{j\in J}W_j{}^*AW_j.\ \blacksquare\end{aligned}$$

なお，$\mathcal{H}$ が可分の場合には，この定理における添字の集合 J は可算集合となることがわかる．

2つの C* 力学系 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(G))$, $(\mathcal{B}, \mathfrak{S}(\mathcal{B}), \beta(G))$ において，$\Lambda\in CP(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が**定常的**（または**共変的**）であるとは，$\Lambda\circ\alpha_g=\beta_g\circ\Lambda$（$\forall g\in G$）が成立するときをいう．$G$ の $\mathcal{A}$ 上の作用 α が強連続で，G の $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ 上の作用 β が τ^s-連続なユニタリー表現 T_g により $\beta_g=\mathrm{Ad}(T_g)$ で与えられるとき，次の定理が成立する．

〈定理 6.36〉 $\Lambda\in CP(\mathcal{A}, \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ が定常的なとき，Λ の Stinespring 表現を $\{\mathcal{K}, \pi, V\}$ とすると，G の $\mathcal{K}$ 上の τ^s-連続なユニタリー表現 U_g が一意に存在して，$\pi(\alpha_g(A))=U_g\pi(A)U_g{}^*$（$\forall A\in\mathcal{A}, \forall g\in G$）かつ $U_gV=VT_g$（$\forall g\in G$）．

証明 〈定理 6.30〉の証明における記号を使って，

$$U_g^0\tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_g(A_i)\otimes T_gx_i,\quad \tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}A_i\otimes x_i\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H},\quad g\in G$$

と定めると，

$$\langle U_g^0\tilde{x}, U_g^0\tilde{y}\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_g(A_i)\otimes T_gx_i,\ \sum_{j=1}^{m}\alpha_g(B_j)\otimes T_gy_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle T_g x_i, \Lambda(\alpha_g(A_i^*B_j))T_g y_j\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, (\beta_{g^{-1}}\circ\Lambda\circ\alpha_g)(A_i^*B_j)y_j\rangle$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle x_i, \Lambda(A_i^*B_j)y_j\rangle=\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle.$$

したがって，$\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U_g が存在して $U_g[\tilde{x}]=[U_g^0\tilde{x}]$ $(\forall\tilde{x}\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H})$. $U_{g_1g_2}^0=U_{g_1}^0U_{g_2}^0$ より，$U_{g_1g_2}=U_{g_1}U_{g_2}$ $(\forall g_1, g_2\in G)$. よって U_g は $\mathcal{K}$ 上のユニタリー表現である．U_g の連続性は α_g と T_g の連続性から容易に示せる．任意の $A\in\mathcal{A}$, $g\in G, \tilde{x}=\sum_{i=1}^{n}A_i\otimes x_i\in\mathcal{A}\odot\mathcal{H}$ に対して，

$$U_g\pi(A)U_g^*[\tilde{x}]=U_g\pi(A)[U_{g^{-1}}^0\tilde{x}]=U_g\pi(A)\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_{g^{-1}}(A_i)\otimes T_g^*x_i\right]$$
$$=U_g\left[\sum_{i=1}^{n}A\alpha_{g^{-1}}(A_i)\otimes T_g^*x_i\right]$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_g(A)A_i\otimes x_i\right]=\pi(\alpha_g(A))[\tilde{x}].$$

ゆえに $\pi(\alpha_g(A))=U_g\pi(A)U_g^*$ $(\forall A\in\mathcal{A}, \forall g\in G)$. さらに，

$$U_gVx=U_g[I\otimes x]=[I\otimes T_gx]=VT_gx, \quad \forall x\in\mathcal{H}$$

より，$U_gV=VT_g$ $(\forall g\in G)$. 最後に，U_g の一意性は，U_g が $U_g\pi(A)V=\pi(\alpha_g(A))U_gV=\pi(\alpha_g(A))VT_g$ $(\forall A\in\mathcal{A})$ を満たさなければならないことより明らか．▮

$\mathcal{H}=\boldsymbol{C}$ の場合を考えれば，〈定理 6.30〉と〈定理 6.36〉は GNS 構成定理（〈定理 3.34〉と〈定理 3.35〉）の拡張になっていることがわかる．さらに，詳細は略するが，〈定理 3.36〉の拡張が Størmer によって次のように与えられている．

1° $\Lambda, \Xi\in CP(\mathcal{A}, \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ において，ある $\lambda>0$ で $\Xi\leqq\lambda\Lambda$ となることは，$T\in\pi(\mathcal{A})'$ が存在して $\Xi(\cdot)=V^*T\pi(\cdot)V$ となることと同値である．

さらに，Ohya は〈定理 6.36〉を証明した際，この定理と上記 1° の結果として次を示した．これは〈定理 5.10〉の（1）の拡張になっている．

2° 定常的な $\Lambda\in CP(\mathcal{A}, \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ に対して，$\Xi\leqq\Lambda$ となる定常的な $\Xi\in CP(\mathcal{A}, \boldsymbol{B}(\mathcal{H}))$ が $\lambda\Lambda$ $(\lambda\geqq0)$ に限ることは，$\pi(\mathcal{A})'\cap U(G)'=\boldsymbol{C}I$ と同値である．

上記の 1°, 2° において，V, π は〈定理 6.30〉におけるそれであり，U は〈定理 6.36〉におけるそれである．

この節の最後に，条件付期待値が完全正写像であることを示しておこう．

〈**定理 6.37**〉 $\mathcal{E}$ が v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ からその v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ への条件付期待値（ノルムが1の射影）ならば，$\mathcal{E}\in CP(\mathfrak{N},\mathfrak{M})$.

証明　任意の $A_i\in\mathfrak{N}$, $B_i\in\mathfrak{M}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，条件付期待値の性質より，

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_i{}^*\mathcal{E}(A_i{}^*A_j)B_j=\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{E}(B_i{}^*A_i{}^*A_jB_j)$$
$$=\mathcal{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\right)^*\left(\sum_{j=1}^{n}A_jB_j\right)\right)\geqq 0.$$

したがって $\mathcal{E}\in CP(\mathfrak{N},\mathfrak{M})$. ▮

この章で論じてきた条件付期待値と完全正写像の基本的結果は，量子情報理論，エントロピー理論，量子統計力学などにおいても重要な役割を果たしていることを付記しておこう（文献［29］参照）.

6.4　エルゴード定理とマルチンゲール収束定理

この節では，NPT におけるエルゴード定理とマルチンゲール収束定理を説明する．v.N. 代数上の非可換マルチンゲールは，条件付期待値のひとつの応用として，Umegaki によって始められた．また，非可換エルゴード理論は v.N. 代数上と C* 代数上の両方で議論されている．ここでは，基本となる NPT の空間として，これまでどおり $(\mathcal{H},\mathfrak{N},\mathcal{P}(\mathfrak{N}),\varphi)$ を設定する．ただし，φ は v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ の忠実な正規状態とする（ゆえに $\mathfrak{N}$ は σ-有限である）.

CPT における確率変数列の収束には，平均収束（L^1-収束，L^2-収束など）と概収束（a.e. 収束）がある．これらに対応して，NPT においても2通りの収束を考える．平均収束には，$\mathfrak{N}$ の中の列（またはネット）に対する τ^s（または τ^{us})-収束と $\mathfrak{N}_*$ の中の列（またはネット）に対するノルム収束が対応する．他方，a.e. 収束には，$\mathfrak{N}$ の中の列に対する概一様収束が対応する．ここで，列 $\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ が $A\in\mathfrak{N}$ に φ に関して**概一様収束**するとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$P\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $\varphi(I-P)<\varepsilon$ かつ $\|(A_n-A)P\|\to 0$ となるときをいう．このとき，$A_n\to A$ (φ-a.u.) と書く．可換な $\mathfrak{N}=L^\infty(\Omega,\mu)$, $\varphi(f)=\int_\Omega f\,d\mu$ $(f\in L^\infty)$ の場合には，Egorov の定理より，φ-a.u. 収束と μ-a.e. 収束が同等であることがわかる.

平均エルゴード定理から説明しよう．まず，補題をひとつ与える.

〈補題 6.38〉 U を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素とし，P を $\mathcal{H}$ から閉部分空間 $\{x\in\mathcal{H}\,;\,Ux=x\}$ への射影作用素とするとき，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^k\xrightarrow{s}P$ $(n\to\infty)$.

証明 まず,『$Ux=x\Longleftrightarrow U^*x=x$』に注意する．$y\in P^\perp\mathcal{H}$ ならば，$\langle x, Uy\rangle=\langle U^*x, y\rangle=\langle x, y\rangle=0$ $(\forall x\in P\mathcal{H})$ より，$Uy\in P^\perp\mathcal{H}$．任意の $x\in\mathcal{H}$ に対して，$y=P^\perp x$ とおき，$\mathcal{K}=\overline{\mathrm{co}}\{U^ky\,;\,k\geqq 0\}$ の中でノルム最小 (i.e., 0 から最短距離) の元を y_0 とする．$Uy_0\in\mathcal{K}$ かつ $\|Uy_0\|=\|y_0\|$ だから，$Uy_0=y_0$ となり $y_0\in P\mathcal{H}$．ところで，$\mathcal{K}\subset P^\perp\mathcal{H}$ より $y_0\in P^\perp\mathcal{H}$．ゆえに $y_0=0$．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i=1$ となる $\lambda_i\geqq 0$ $(i=0, 1, \cdots, m-1)$ が存在して $\left\|\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_iU^iy\right\|<\varepsilon$．$y_1=\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_iU^iy$ とおくと，

$$\begin{aligned}\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kx-Px\right\|&=\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^k(Px+y)-Px\right\|=\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^ky\right\|\\&\leqq\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^k(y-y_1)\right\|+\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^ky_1\right\|\\&\leqq\left\|n^{-1}\sum_{i=0}^{m-1}\lambda_i\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(U^ky-U^{k+i}y)\right\}\right\|+\|y_1\|\\&<2m\|y\|n^{-1}+\varepsilon.\end{aligned}$$

これより，$\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kx-Px\right\|\to 0$ $(n\to\infty)$ がわかる．∎

〈定理 6.39〉 $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ とし，$\mathfrak{N}^\alpha$ を α の不動点代数とする (i.e., $\mathfrak{N}^\alpha\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\alpha(A)=A\}$)．$\varphi$ が α-不変ならば，次が成立する．

（1） $(\varphi, \mathfrak{N}^\alpha)$-条件付期待値 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}^\alpha$ が存在する．

（2） 任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\xrightarrow{us}\mathcal{E}(A)$ $(n\to\infty)$.

（3） 任意の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\circ\alpha^k-\psi\circ\mathcal{E}\right\|\to 0$ $(n\to\infty)$.

証明 φによる $\mathfrak{N}$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ をとれば，φ が忠実だから，π_φ は忠実表現であり x_φ は $\pi_\varphi(\mathfrak{N})$ に関する巡回かつ分離ベクトルである．したがって，最初から，巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ と書けるとしてよい．このとき，φ が α-不変だから，〈定理 3.35〉より $\mathcal{H}$ 上のユニタリー作用素 U が存在して $Ux_0=x_0$ かつ $\alpha(A)=UAU^*$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$.

（1）：各 $B', C'\in\mathfrak{N}'$ に対して，$\psi\in\mathfrak{N}_*$ を $\psi(A)=\langle B'x_0, AC'x_0\rangle$ $(A\in\mathfrak{N})$ で定める．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\psi\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\right)=\left\langle C'^*B'x_0, n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kAx_0\right\rangle$$

であるから，〈補題 6.38〉より $\hat{A}(\psi)=\lim_{n\to\infty}\psi\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\right)$が存在する．このような形の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ の有限個の線形結合の全体は $\mathfrak{N}_*$ でノルム稠密であり，また$\left|\psi\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\right)\right|\leqq\|A\|\|\psi\|$ $(\forall\psi\in\mathfrak{N}_*, \forall n\in\boldsymbol{N})$ であるから，すべての $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\hat{A}(\psi)=\lim_{n\to\infty}\psi\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\right)$ が存在して $|\hat{A}(\psi)|\leqq\|A\|\|\psi\|$ が成立する．よって，$\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{N}=(\mathfrak{N}_*)^*$ が一意に存在して，$\hat{A}(\psi)=\psi(\mathcal{E}(A))$ $(\forall\psi\in\mathfrak{N}_*)$ かつ $\|\mathcal{E}(A)\|\leqq\|A\|$. $\mathcal{E}$ が線形写像であることは明らかであり，$\psi(\alpha(\mathcal{E}(A)))=\hat{A}(\psi\circ\alpha)=\hat{A}(\psi)=\psi(\mathcal{E}(A))$ $(\forall\psi\in\mathfrak{N}_*)$ より，$\mathcal{E}(A)\in\mathfrak{N}^\alpha$. さらに，$A\in\mathfrak{N}^\alpha$ ならば，$\hat{A}(\psi)=\psi(A)$ より $\mathcal{E}(A)=A$. したがって，$\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}^\alpha$ はノルムが1の射影であり，$\varphi(\mathcal{E}(A))=\hat{A}(\varphi)=\varphi(A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. ゆえに $\mathcal{E}$ は $(\varphi,\mathfrak{N}^\alpha)$-条件付期待値である．

（2）:〈補題 6.38〉の P を使うと，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\langle B'x_0, \mathcal{E}(A)x_0\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle B'x_0, n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)x_0\right\rangle$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\langle B'x_0, n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kAx_0\right\rangle=\langle B'x_0, PAx_0\rangle, \quad \forall B'\in\mathfrak{N}'.$$

よって $\mathcal{E}(A)x_0=PAx_0$. したがって，〈補題 6.38〉より

$$\left\|\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)-\mathcal{E}(A)\right)B'x_0\right\|$$
$$\leqq\|B'\|\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kAx_0-PAx_0\right\|\to 0 \ (n\to\infty), \quad \forall B'\in\mathfrak{N}'.$$

$\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\right\|\leqq\|A\|$ かつ $\{\mathfrak{N}'x_0\}^-=\mathscr{H}$ だから，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\xrightarrow{us}\mathcal{E}(A)$ $(n\to\infty)$ となる．

（3）: 各 $B', C'\in\mathfrak{N}'$ に対して，$\psi(A)=\langle B'x_0, AC'x_0\rangle$ と定めると，

$$\left|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(\alpha^k(A))-\psi(\mathcal{E}(A))\right|$$
$$=\left|\left\langle C'^*B'x_0, n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^kAx_0\right\rangle-\langle C'^*B'x_0, PAx_0\rangle\right|$$
$$=\left|\left\langle\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^{*k}-P\right)C'^*B'x_0, Ax_0\right\rangle\right|$$
$$\leqq\left\|\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^{*k}-P\right)C'^*B'x_0\right\|\|A\|.$$

〈補題 6.38〉は，U を U^* で置き換えても，同じ P で成立するから，

$$\left\|n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\circ\alpha^k-\psi\circ\mathcal{E}\right\|\leqq\left\|\left(n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^{*k}-P\right)C'^*B'x_0\right\|\to 0 \ (n\to\infty).$$

上の形の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ の有限個の線形結合の全体は $\mathfrak{N}_*$ でノルム稠密であるから，すべての $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\circ\alpha^k$ は $\psi\circ\mathcal{E}$ にノルム収束する．∎

註 〈補題 6.38〉と〈定理 6.39〉は，それぞれ τ^s-連続な1径数ユニタリー群 $\{U_t\}$ と τ^s-連続な1径数自己同型群 α_t の場合でも成立する．この場合は，P を $\{x\in\mathcal{H}\,;\,U_tx=x,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\}$ への射影作用素とし，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}U^k$ と $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)$ をそれぞれ $t^{-1}\int_0^t U_s ds$ と $t^{-1}\int_0^t \alpha_s(A)ds$ で置き換えればよい．証明もほとんど同様である．

概一様収束に関する次のエルゴード定理は，Lance によって証明された．CPTでのエルゴード定理およびマルチンゲール収束定理においては，平均収束に比べて a.e. 収束の証明はかなり面倒である．このことは NPT でも同様で，次の定理の証明はやさしくないので，ここでは省略する．

〈定理 6.40〉 〈定理 6.39〉と同じ仮定の下で，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k(A)\to\mathcal{E}(A)$ （φ-a.u.）（$n\to\infty$）．

次に，マルチンゲール収束定理について説明しよう．まず，Umegaki の結果を述べる．φ として $\mathfrak{N}$ の忠実な正規トレース状態 τ をとる（ゆえに $\mathfrak{N}$ は σ-有限かつ有限である）．このとき，〈定理 6.25〉より，$\mathfrak{N}$ の任意の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ に対して $(\tau,\mathfrak{M})$-条件付期待値 $E_\tau(\cdot|\mathfrak{M}):L^1(\mathfrak{N},\tau)\to L^1(\mathfrak{M},\tau)$ が存在する．いま，$\{\mathfrak{M}_j\}$ を $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の増大ネットとする．ネット $\{X_j\}\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が $\{\mathfrak{M}_j\}$ に関する**マルチンゲール**であるとは，任意の $i\geqq j$ に対して $X_j=E_\tau(X_i|\mathfrak{M}_j)$ となるときをいう．また，$\mathcal{X}\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が**一様可積分**であるとは，$\mathcal{X}$ が $\|\cdot\|_1$-有界であり，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$\tau(E)<\delta$ ならば $|\tau(XE)|<\varepsilon$ （$\forall X\in\mathcal{X}$）となるときをいう．

〈定理 6.41〉 上記の $\{\mathfrak{M}_j\}$ に関するマルチンゲール $\{X_j\}\subset L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，次は同値である．

（1） $\{X_j\}$ は一様可積分である．

（2） $\{X_j\}$ は $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ において相対弱コンパクトである．

（3） $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して $X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ （$\forall j$）．

（4） $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して $\|X_j-X\|_1\to 0$.

さらに，$\{X_j\}\subset L^2(\mathfrak{N},\tau)$ （resp. $\{X_j\}\subset\mathfrak{N}$）のとき，次は同値である．

(1′) $\{X_j\}$ は $\|\cdot\|_2$-有界（resp. 一様有界）である．

(3′) $X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$（resp. $X\in\mathfrak{N}$）が存在して $X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ $(\forall j)$．

(4′) $X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ (resp. $X\in\mathfrak{N}$) が存在して $\|X_j-X\|_2\to 0$ (resp. $X_j\xrightarrow{us}X$)．

証明 (1)⇒(2)：$\psi(A)=\tau(XA)$ で定まる対応 $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)\longmapsto\psi\in\mathfrak{N}_*$ により，$L^1(\mathfrak{N},\tau)=\mathfrak{N}_*$ と同一視できる．したがって〈定理4.15〉より，(2)は次の条件と同値である：$\{X_j\}$ は $\|\cdot\|_1$-有界，かつ，任意の直交列 $\{E_n\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して X_j について一様に $\tau(X_jE_n)\to 0$ $(n\to\infty)$．$\{X_j\}$ が一様可積分のとき，この条件が成立することはすぐにわかる．

(2)⇒(3)：(2)より，$\{X_j\}$ の弱位相での集積点 $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在する．任意の j と $B\in\mathfrak{M}_j$ に対して，$\tau(X_iB)=\tau(E_\tau(X_i|\mathfrak{M}_j)B)=\tau(X_jB)$ $(\forall i\geqq j)$ であるから，$\tau(XB)=\tau(X_jB)$ となる．よって $X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ $(\forall j)$．

(3)⇒(4)：$\mathfrak{M}=(\bigcup_j\mathfrak{M}_j)''=\overline{\bigcup_j\mathfrak{M}_j}^{\,s}$ とおく．〈定理6.25〉より，$L^2(\mathfrak{N},\tau)$ 上で，$E_\tau(\cdot|\mathfrak{M}_j)$，$E_\tau(\cdot|\mathfrak{M})$ はそれぞれ閉部分空間 $L^2(\mathfrak{M}_j,\tau)$，$L^2(\mathfrak{M},\tau)$ への射影作用素である．また $L^2(\mathfrak{M},\tau)=\{\bigcup_j L^2(\mathfrak{M}_j,\tau)\}^-$ が成立する．よって，射影作用素として $E_\tau(\cdot|\mathfrak{M}_j)\uparrow E_\tau(\cdot|\mathfrak{M})$．したがって，任意の $A\in\mathfrak{N}(\subset L^2(\mathfrak{N},\tau))$ に対して，$\|E_\tau(A|\mathfrak{M}_j)-E_\tau(A|\mathfrak{M})\|_2\to 0$．いま，$X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して，$X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$，$X_0=E_\tau(X|\mathfrak{M})$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A\in\mathfrak{N}$ が存在して $\|X-A\|_1<\varepsilon/2$．このとき，

$$\begin{aligned}\|X_j-X_0\|_1&\leqq\|E_\tau(X-A|\mathfrak{M}_j)\|_1+\|E_\tau(A|\mathfrak{M}_j)-E_\tau(A|\mathfrak{M})\|_1+\|E_\tau(A-X|\mathfrak{M})\|_1\\&<\|E_\tau(A|\mathfrak{M}_j)-E_\tau(A|\mathfrak{M})\|_2+\varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに $\|X_j-X_0\|_1\to 0$．

(4)⇒(3)：$\|X_j-X\|_1\to 0$ とすると，任意の j と $B\in\mathfrak{M}_j$ に対して，$\tau(X_iB)=\tau(X_jB)$ $(\forall i\geqq j)$ であるから，$\tau(X_jB)=\lim_{i\geqq j}\tau(X_iB)=\tau(XB)$．よって $X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ $(\forall j)$．

(4)⇒(1)：$\|X_j-X\|_1\to 0$ とすると，上で示したように，$X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ $(\forall j)$．$\|X_j\|_1\leqq\|X\|_1$ より，$\{X_j\}$ は $\|\cdot\|_1$-有界である．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$A\in\mathfrak{N}$ が存在して $\|X-A\|_1<\varepsilon/2$．このとき，$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$\tau(E)<\varepsilon/2\|A\|$ ならば，

$$\begin{aligned}|\tau(X_jE)|&\leqq|\tau(E_\tau(X-A|\mathfrak{M}_j)E)|+|\tau(E_\tau(A|\mathfrak{M}_j)E)|\\&\leqq\|E_\tau(X-A|\mathfrak{M}_j)\|_1+\|E_\tau(A|\mathfrak{M}_j)\|\tau(E)\\&\leqq\|X-A\|_1+\|A\|\tau(E)<\varepsilon.\end{aligned}$$

よって $\{X_j\}$ は一様可積分である．

次に，$\{X_j\}\subset L^2(\mathfrak{N},\tau)$ の場合を示そう．

(1′)⇒(3′)：$\{X_j\}$ が $\|\cdot\|_2$-有界ならば，$\{X_j\}$ は $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ において相対弱コンパクトである．したがって，$\{X_j\}$ の弱位相での集積点 $X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ をとれば，(2)⇒(3)の証明と同様にして，$X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ $(\forall j)$．

(3′)⇒(4′) は (3)⇒(4) の証明で述べたことから明らか．(4′)⇒(3′) は (4)⇒(3) と同様であり，(3′)⇒(1′) は明らか．

最後に，$\{X_j\}\subset\mathfrak{N}$ の場合を示そう．

(1′)⇒(3′)：$\{X_j\}$ が一様有界ならば，$\{X_j\}$ は $\|\cdot\|_2$-有界であるから，$X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ が存在して，$X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ ($\forall j$) かつ $\|X_j-X\|_2\to 0$．よって $\|X_j-X\|_1\to 0$．任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$|\tau(XA)|=\lim_j|\tau(X_jA)|\leqq(\sup_j\|X_j\|)\|A\|_1$ となるから，$A\in\mathfrak{N}\longmapsto\tau(XA)$ は $L^1(\mathfrak{N},\tau)$ 上の有界線形汎函数に拡張できる．よって $X_0\in\mathfrak{N}=L^1(\mathfrak{N},\tau)^*$ が存在して $\tau(XA)=\tau(X_0A)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$)．ゆえに $X=X_0\in\mathfrak{N}$．

(3′)⇒(4′)：$X\in\mathfrak{N}$ が存在して $X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ とする．(3)⇒(4) の証明から，$X_0=E_\tau(X|\mathfrak{M})$ (ただし $\mathfrak{M}=(\bigcup_j\mathfrak{M}_j)''$) とすると，$\|X_j-X_0\|_2\to 0$．このとき，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\|(X_j-X_0)A\|_2\leqq\|X_j-X_0\|_2\|A\|\to 0$．$\{X_j\}$ が一様有界であり，$\mathfrak{N}$ が $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ で稠密であるから，任意の $Y\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ に対して $\|(X_j-X_0)Y\|_2\to 0$．ところで，$\pi(A)Y=AY$ ($A\in\mathfrak{N}$, $Y\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$) で定まる $\mathfrak{N}$ の $L^2(\mathfrak{N},\tau)$ 上の表現 π は忠実である（実際，〈定理 6.24〉の上で注意したように，この π は τ による $\mathfrak{N}$ の GNS 表現である）．したがって $X_j\xrightarrow{s}X_0$ となり，$X_j\xrightarrow{us}X_0$．

(4′)⇒(3′)：$X_j\xrightarrow{us}X\in\mathfrak{N}$ ならば，$\|X_j-X\|_2\to 0$ となるから，$X_j=E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)$ ($\forall j$) が成立する．

(3′)⇒(1′) は明らか．▌

減少ネットの場合の Umegaki の結果は次のようである．この定理は以下の〈定理 6.43〉に含まれる（〈定理 6.43〉の註参照）ので，証明はしない．

〈定理 6.42〉 $\{\mathfrak{M}_j\}$ を $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の減少ネットとし，$\mathfrak{M}=\bigcap_j\mathfrak{M}_j$ とするとき，次が成立する．

(1) 任意の $X\in L^1(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$\|E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)-E_\tau(X|\mathfrak{M})\|_1\to 0$．

(2) 任意の $X\in L^2(\mathfrak{N},\tau)$ に対して，$\|E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)-E_\tau(X|\mathfrak{M})\|_2\to 0$．

(3) 任意の $X\in\mathfrak{N}$ に対して，$E_\tau(X|\mathfrak{M}_j)\xrightarrow{us}E_\tau(X|\mathfrak{M})$．

ここで，最初の設定 $(\mathcal{H},\mathfrak{N},\mathcal{P}(\mathfrak{N}),\varphi)$ に戻って，マルチンゲールの平均収束定理を与えよう．$\{\mathfrak{M}_j\}$ を $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の増大 (resp. 減少) ネットとし，$\mathfrak{M}=(\bigcup_j\mathfrak{M}_j)''$ (resp. $\mathfrak{M}=\bigcap_j\mathfrak{M}_j$) とおく．$\varphi$ が一般の忠実な正規状態なので，各 j に対して条件付期待値 $\mathcal{E}_j=E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M}_j)$ の存在を仮定する．このとき，次が証明される．

〈定理 6.43〉 上記の仮定の下で，条件付期待値 $\mathcal{E}=E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ も存在して，次が成立する．

（1） 任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\mathcal{E}_j(A)\xrightarrow{us}\mathcal{E}(A)$.

（2） 任意の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\|\psi\circ\mathcal{E}_j-\psi\circ\mathcal{E}\|\to 0$.

証明 モジュラー自己同型群 σ_t^φ に関して，$\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M}_j)=\mathfrak{M}_j$ $(\forall t\in\boldsymbol{R}, \forall j)$ であるから，$\sigma_t^\varphi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ も成立する．よって〈定理 6.27〉より，$\mathcal{E}=E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ も存在する．〈定理 6.39〉の証明と同様に，巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0, Ax_0\rangle$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ と書けるとしてよい．$\mathcal{H}$ から $\{\mathfrak{M}_jx_0\}^-$, $\{\mathfrak{M}x_0\}^-$ への射影作用素をそれぞれ P_j, P とすると，〈定理 6.27〉の証明より，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して $\mathcal{E}_j(A)x_0=P_jAx_0$, $\mathcal{E}(A)x_0=PAx_0$ が成立する．そこで，まず $P_j\xrightarrow{s}P$ を示そう．$\mathfrak{M}_j\uparrow\mathfrak{M}$ のときは，$\bigcup_j\mathfrak{M}_j$ が $\mathfrak{M}$ で τ^s-稠密だから，$\{\mathfrak{M}x_0\}^-=\{\bigcup_j\mathfrak{M}_jx_0\}^-$ が成立する．よって $P_j\xrightarrow{s}P$. $\mathfrak{M}_j\downarrow\mathfrak{M}$ のときは，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\|\mathcal{E}_j(A)\|\leqq\|A\|$ だから，〈定理 4.23〉より $\{\mathcal{E}_j(A)\}$ は τ^{uw}-集積点 B をもつ．$B\in\mathfrak{M}$ であることはすぐにわかる．$\mathcal{E}(\mathcal{E}_j(A))=\mathcal{E}(A)$ $(\forall j)$ であり，$\mathcal{E}$ が τ^{uw}-連続である（これは，$\mathcal{E}$ の正規性より，〈補題 4.31〉の証明と同様に示せる）から，$B=\mathcal{E}(B)=\mathcal{E}(A)$ を得る．ゆえに $\mathcal{E}(A)$ が $\{\mathcal{E}_j(A)\}$ のただ1つの τ^{uw}-集積点となるから，$\mathcal{E}_j(A)\xrightarrow{uw}\mathcal{E}(A)$. したがって，$\mathcal{E}_j(A)x_0=P_jAx_0$ は $\mathcal{E}(A)x_0=PAx_0$ に弱収束する．$P_j\downarrow$ に注意すれば，$P_j\xrightarrow{s}P$ がわかる．

（1）：任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\|(\mathcal{E}_j(A)-\mathcal{E}(A))B'x_0\|\leqq\|B'\|\|(P_j-P)Ax_0\|\to 0,\quad \forall B'\in\mathfrak{N}'.$$

$\|\mathcal{E}_j(A)\|\leqq\|A\|$ かつ $\{\mathfrak{N}'x_0\}^-=\mathcal{H}$ だから，$\mathcal{E}_j(A)\xrightarrow{us}\mathcal{E}(A)$.

（2）：各 $B', C'\in\mathfrak{N}'$ に対して，$\psi(A)=\langle B'x_0, AC'x_0\rangle$ と定めると，

$$\begin{aligned}&|\psi(\mathcal{E}_j(A))-\psi(\mathcal{E}(A))|\\&\quad=|\langle C'^*B'x_0, P_jAx_0\rangle-\langle C'^*B'x_0, PAx_0\rangle|\\&\quad=|\langle(P_j-P)C'^*B'x_0, Ax_0\rangle|\leqq\|(P_j-P)C'^*B'x_0\|\|A\|.\end{aligned}$$

よって $\|\psi\circ\mathcal{E}_j-\psi\circ\mathcal{E}\|\leqq\|(P_j-P)C'^*B'x_0\|\to 0$. このような形の $\psi\in\mathfrak{N}_*$ の有限個の線形結合の全体は $\mathfrak{N}_*$ でノルム稠密であるから，すべての $\psi\in\mathfrak{N}_*$ に対して，$\psi\circ\mathcal{E}_j$ は $\psi\circ\mathcal{E}$ にノルム収束する．▌

註 φ がトレース状態 τ で $\mathfrak{M}_j\downarrow\mathfrak{M}$ の場合，〈定理 6.43〉の（1），（2）はそれぞれ〈定理 6.42〉の（3），（1）を意味する．また，$P_j\xrightarrow{s}P$ は〈定理 6.42〉の（2）を意味する．

Dang-Ngoc は，〈定理 6.40〉を証明した Lance の方法を応用して，概一様収束に関する次のマルチンゲール収束定理を証明した．これの証明は〈定理 6.40〉と同じく省略する．

〈定理 6.44〉 $\{\mathfrak{M}_n\}$ を $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数の増大 (resp. 減少) 列とし，$\mathfrak{M}=(\bigcup_n\mathfrak{M}_n)''$ (resp. $\mathfrak{M}=\bigcap_n\mathfrak{M}_n$) とおく．各 n に対して条件付期待値 $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M}_n)$ の

存在を仮定するとき，次が成立する．

（1） 任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$E_\varphi(A|\mathfrak{M}_n)\to E_\varphi(A|\mathfrak{M})$ （φ-a.u.）．

（2） $\mathfrak{M}_n\uparrow\mathfrak{M}$ の場合で，$\{A_n\}\subset\mathfrak{N}$ が $\{\mathfrak{M}_n\}$ に関するマルチンゲール（i.e., $A_n=E_\varphi(A_{n+1}|\mathfrak{M}_n), \forall n\in\boldsymbol{N}$）とする．$\{A_n\}$ が一様有界ならば，$A\in\mathfrak{M}$ が存在して，$A_n=E_\varphi(A|\mathfrak{M}_n)$ （$\forall n\in\boldsymbol{N}$）かつ $A_n\to A$ （φ-a.u.）．

6.5 状態と十分性

CPT における測度論的な十分性の概念は，Halmos-Savage によって導入され，相対エントロピーと関連して，数理統計学において非常に重要な役割を果たしている．この節では，十分性の概念を NPT へ拡張し，それを状態の分類に応用する．非可換系における十分性の研究は，Umegaki, Hiai-Ohya-Tsukada などによってなされた．

以下，$\mathfrak{N}$ を v.N. 代数とし，$\mathfrak{N}$ 上の正規状態の全体を $\mathfrak{S}_n$ で表す．$\varphi\in\mathfrak{S}_n$ と $\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ に対して，$(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値が存在するとき，それを $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ で表す．

［**定義 6.5**］ $\mathcal{S}\subset\mathfrak{S}_n$ とする．$\mathfrak{N}$ の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ に関して**十分**であるとは，写像 $\mathcal{E}:\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ が存在して，任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して $\mathcal{E}$ が $(\varphi,\mathfrak{M})$-条件付期待値となる場合をいう．すなわち，$\varphi\circ\mathcal{E}=\varphi$ （$\forall\varphi\in\mathcal{S}$）を満たす $\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{M}$ へのノルムが 1 の射影 $\mathcal{E}$ が存在することである．さらに，$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ に関して十分であり，$\mathcal{S}$ に関して十分な v.N. 部分代数がすべて $\mathfrak{M}$ を含むとき，$\mathfrak{M}$ は $\mathcal{S}$ に関して**最小十分**であるという．

次の結果は，上の定義より容易に示せる．

1° $\varphi,\psi\in\mathfrak{S}_n$ が $\psi\ll\varphi$ (i.e., $\varphi(A^*A)=0\Rightarrow\psi(A^*A)=0$) のとき，$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であることと，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在して $\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))=\psi(A)$ （$\forall A\in\mathfrak{N}$）となることは同値である．

2° $\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なとき，$\varphi=\psi$ は $\varphi\restriction\mathfrak{M}=\psi\restriction\mathfrak{M}$ と同値である．

$\mathcal{S}(\subset\mathfrak{S}_n)$ が忠実な状態 φ を含むとき，次が成立する．

3° $\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ に関して十分であることと，$\mathfrak{M}$ が対 $\{\varphi,\psi\}$ （$\forall\psi\in\mathcal{S}$）に関して

十分であることは同値である．（これは $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が一意である（〈補題 6.23〉）ことと 1° より明らか．）

4°　$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{S}$ に関して十分なとき，$\mathfrak{M}$ を含む任意の v.N. 部分代数 $\mathfrak{M}_0$ は，もし $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M}_0)$ が存在すれば，$\mathcal{S}$ に関して十分である．

以下，忠実な正規状態 φ を固定し，$\sigma_t{}^\varphi$ を φ に関するモジュラー自己同型群とする．

〈補題 6.45〉　$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在すれば，　$E_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{M})=\sigma_t{}^\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))$ $(\forall A\in\mathfrak{M}, \forall t\in\boldsymbol{R})$.

証明　任意の $A\in\mathfrak{N}$ と $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$B=E_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{M})-\sigma_t{}^\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))$ とおくと，$\sigma_t{}^\varphi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ より $B\in\mathfrak{M}$ である．よって，$B=W|B|$ $(W\in\mathfrak{M})$ を B の極分解とすると，

$$\begin{aligned}\varphi(|B|)&=\varphi(W^*B)=\varphi(W^*E_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{M}))-\varphi(\sigma_t{}^\varphi(\sigma_{-t}{}^\varphi(W^*)E_\varphi(A|\mathfrak{M})))\\&=\varphi(E_\varphi(W^*\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{M}))-\varphi(E_\varphi(\sigma_{-t}{}^\varphi(W^*)A|\mathfrak{M}))\\&=\varphi(W^*\sigma_t{}^\varphi(A))-\varphi(\sigma_{-t}{}^\varphi(W^*)A)=0.\end{aligned}$$

したがって $B=0$. ▌

さて，$\sigma_t{}^\varphi$ に関する不変状態および KMS 状態が，十分性の概念を使って特徴づけられることを示そう．以下，$\sigma_t{}^\varphi$-不変な正規状態の全体を $I(\sigma^\varphi)$ で，$\sigma_t{}^\varphi$ に関して $\beta=-1$ で KMS 条件を満たす正規状態の全体を $K(\sigma^\varphi)$ で表すことにする．

〈定理 6.46〉　（1）　$\mathfrak{N}_\varphi(=\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\sigma_t{}^\varphi(A)=A, \forall t\in\boldsymbol{R}\})$ は $I(\sigma^\varphi)$ に関して最小十分である．

（2）　$\psi\in\mathfrak{S}_n$ に対して，$\psi\in I(\sigma^\varphi)$ と $\mathfrak{N}_\varphi$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であることは同値である．

証明　（1）：$\sigma_t{}^\varphi(A)=A$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_\varphi, \forall t\in\boldsymbol{R})$ だから，〈定理 6.27〉より $E_\varphi(\cdot|\mathfrak{N}_\varphi)$ は存在する．$\psi\in I(\sigma^\varphi)$ のとき，〈系 6.15〉より，正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{N}_\varphi$ が存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$. $T_n\uparrow T$ となる $\{T_n\}\subset(\mathfrak{N}_\varphi)_+$ をとると，〈補題 6.11〉の（2）より，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\psi(A)&=\varphi(TA)=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nA)=\lim_{n\to\infty}\varphi(E_\varphi(T_nA|\mathfrak{N}_\varphi))\\&=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nE_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\varphi(TE_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi)).\end{aligned}$$

これで，$\mathfrak{N}_\varphi$ は $I(\sigma^\varphi)$ に関して十分であることが示せた．$\mathfrak{N}_\varphi$ の最小性を示すために，$\mathfrak{M}$ を $I(\sigma^\varphi)$ に関して十分な任意の v. N. 部分代数とする． $\varphi(Q^2)=1$ となる任意の $Q\in(\mathfrak{N}_\varphi)_+$ に対して，$\psi=\varphi(Q\cdot Q)\in\mathfrak{S}_n$ とおくと，$\sigma_t{}^\varphi(Q)=Q$ より $\psi\in I(\sigma^\varphi)$ がわかる．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}_+$ に対して，

$$\psi(A)=\varphi(QAQ)=\varphi(Q^2E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi)^{1/2}Q^2E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi)^{1/2})$$
$$\leqq\|Q\|^2\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\|Q\|^2\varphi(A)$$

となるから，$\psi\leqq\|Q\|^2\varphi$. $\varphi\restriction\mathfrak{M}$, $\psi\restriction\mathfrak{M}$ に対して〈定理 6.6〉を適用すると，$T\in\mathfrak{M}_+$ が存在して，$\psi(A)=\varphi(TAT)$ ($\forall A\in\mathfrak{M}$). ここで，$\mathfrak{M}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なことから，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{M})$ が存在して，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して，

$$\psi(A)=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{M}))=\varphi(TE_\varphi(A|\mathfrak{M})T)$$
$$=\varphi(E_\varphi(TAT|\mathfrak{M}))=\varphi(TAT).$$

したがって $\varphi(Q\cdot Q)=\psi=\varphi(T\cdot T)$. よって，$\varphi$ が忠実であることから，$Q=T\in\mathfrak{M}$. ゆえに $\mathfrak{N}_\varphi\subset\mathfrak{M}$.

(2)：$\psi\in I(\sigma^\varphi)$ のとき，$\mathfrak{N}_\varphi$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であることは，(1) より明らか．逆に，$\mathfrak{N}_\varphi$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分なとき，〈補題 6.45〉より

$$\psi(\sigma_t{}^\varphi(A))=\psi(E_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A)|\mathfrak{N}_\varphi))$$
$$=\psi(\sigma_t{}^\varphi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi)))$$
$$=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{N}_\varphi))=\psi(A),\quad\forall A\in\mathfrak{N}.\ \blacksquare$$

〈定理 6.47〉 (1) $\mathfrak{Z}(\equiv\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}')$ は $K(\sigma^\varphi)$ に関して最小十分である．

(2) $\psi\in\mathfrak{S}_n$ に対して，$\psi\in K(\sigma^\varphi)$ と $\mathfrak{Z}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であることは同値である．

証明 (1)：〈定理 6.27〉より，$E_\varphi(\cdot|\mathfrak{Z})$ が存在する．さらに，$\psi\in K(\sigma^\varphi)$ のとき，〈定理 6.13〉より，正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{Z}$ が存在して $\psi(A)=\varphi(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{N}$). したがって，〈定理 6.46〉の (1) と同様にして，$\mathfrak{Z}$ は $K(\sigma^\varphi)$ に関して十分であることが証明される．また，$\mathfrak{Z}$ の最小性も同様である．

(2)：$\psi\in K(\sigma^\varphi)$ のとき，$\mathfrak{Z}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分であることは，(1) より明らか．逆に，$\mathfrak{Z}$ が $\{\varphi,\psi\}$ に関して十分とすると，$\varphi\restriction\mathfrak{Z}$ が $\mathfrak{Z}$ 上のトレースとなることに注意し，$\varphi\restriction\mathfrak{Z}$, $\psi\restriction\mathfrak{Z}$ に対して〈系 6.15〉を適用すると，正の自己共役作用素 $T\eta\mathfrak{Z}$ が存在して，$\psi(A)=\varphi(TA)$ ($\forall A\in\mathfrak{Z}$). ここで，$T\eta\mathfrak{Z}$ だから，$T_n\uparrow T$ となる $\{T_n\}\subset\mathfrak{Z}_+$ がとれて，任意の $A\in\mathfrak{N}$ に対して

$$\psi(A)=\psi(E_\varphi(A|\mathfrak{Z}))=\varphi(TE_\varphi(A|\mathfrak{Z}))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nE_\varphi(A|\mathfrak{Z}))=\lim_{n\to\infty}\varphi(E_\varphi(T_nA|\mathfrak{Z}))$$
$$=\lim_{n\to\infty}\varphi(T_nA)=\varphi(TA).$$

したがって〈定理 6.13〉より，$\psi\in K(\sigma^\varphi)$. ∎

これらの定理より，次のよく知られた事実が容易に示される．

〈系 6.48〉 （1） σ_t^{φ} がエルゴード的 (i.e., $\mathfrak{N}_{\varphi}=\boldsymbol{C}I$) $\Longleftrightarrow I(\sigma^{\varphi})=\{\varphi\}$.
（2） $\mathfrak{N}$ が因子 (i.e., $\mathfrak{Z}=\boldsymbol{C}I$) $\Longleftrightarrow K(\sigma^{\varphi})=\{\varphi\}$.

最後に，$\mathfrak{N}$ の τ^s–連続な1径数自己同型群 α_t の場合を考えよう．α_t–不変な正規状態の全体 $I(\alpha)$ と，α_t の不動点代数 $\mathfrak{N}^{\alpha}(\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\alpha_t(A)=A,\ \forall t\in\boldsymbol{R}\})$ に対して，次が成立する．

〈定理 6.49〉 $I(\alpha)$ が忠実な状態 φ を含むとき，$\mathfrak{N}^{\alpha}$ は $I(\alpha)$ に関して十分である．

証明 〈定理 6.39〉の註より，$(\varphi,\mathfrak{N}^{\alpha})$–条件付き期待値 $\mathcal{E}$ が存在する．さらに，この $\mathcal{E}$ は忠実な $\varphi\in I(\alpha)$ のとり方に関係しない．任意の $\psi\in I(\alpha)$ に対して，忠実な $\psi_1=(\varphi+\psi)/2\in I(\alpha)$ をとると，$\psi_1\circ\mathcal{E}=\psi_1$．よって $\psi\circ\mathcal{E}=\psi$ を得る．▌

註 〈定理 6.49〉は一般の W^* 力学系 $(\mathfrak{N},G,\alpha)$ に対しても成立する．実際，$\varphi(A^*A)=0$ $(\forall\varphi\in I(\alpha))$ ならば $A=0$ であるとき，$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}^{\alpha}$ へのノルムが1の正規な射影 $\mathcal{E}$ が存在して，$\overline{\mathrm{co}}\{\alpha_g(A)\,;\,g\in G\}\cap\mathfrak{N}^{\alpha}=\{\mathcal{E}(A)\}$ $(\forall A\in\mathfrak{N}$；ただし $\overline{\mathrm{co}}$ は τ^w–閉凸包) かつ $\varphi\circ\mathcal{E}=\varphi$ $(\forall\varphi\in I(\alpha))$ を満たす (Kovács–Szücs のエルゴード定理).

十分性の概念は相対エントロピーと結びつき，数学的に興味ある結果が得られているが，本書の範囲を越えるので，ここでは割愛する（文献［29］参照）．

第7章　Connes の III 型理論

III 型（純無限型）v.N. 代数については，最初のうちは，同型でないものがどのくらい存在するかもわからず，これを解明する有効な道具がなかった．1960 年代後半，Powers，Araki–Woods によってIII型の分類が始められた．さらに，1970 年代に入って Connes は，Tomita–Takesaki 理論と Arveson の調和解析的スペクトル理論を結びつけて，v.N. 代数の同型不変量を開発し，これを用いてIII型 v.N. 代数の分類を完成した．さらに，Takesaki と Connes はIII型 v.N. 代数の接合積を用いた構造理論をつくり上げた．この章の目標は，Connes によるIII型 v.N. 代数の分類理論を紹介することである．7.1 節で，Arveson スペクトルと Connes スペクトルを説明する．7.2 節で，Connes スペクトルを用いて，III型因子が III_0 型，III_λ 型 $(0<\lambda<1)$，III_1 型に分類できることを示す．最後に，III型 v.N. 代数の構造理論を紹介したが，紙数の都合により，概略だけに留めた．

7.1　Arveson スペクトルと Connes スペクトル

この節では，G を局所コンパクト可換群，$\hat{G}$ を G の双対群とし，群演算は＋記号で単位元は 0 で書く．G 上の調和解析に関する記号と結果を 1.9 節でまとめておいた．以下，W^* 力学系 $(\mathfrak{N}, G, \alpha)$，すなわち G の v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上の連続作用 α が与えられたとし，α の Arveson スペクトルおよび Connes スペクトルの定義と基本性質を解説する．

$\mu\in M(G)$ と $A\in\mathfrak{N}$ に対して，$\alpha_\mu(A)\in\mathfrak{N}$ を $\varphi(\alpha_\mu(A))=\int_G\varphi(\alpha_g(A))d\mu(g)$ $(\varphi\in\mathfrak{N}_*)$ により定める．このとき，$\alpha_\mu(A)=\int_G\alpha_g(A)d\mu(g)$ と書く．特に，$f\in L^1(G)$ に対して，$\alpha_f(A)=\int_G f(g)\alpha_g(A)dg$ と書ける．この α_f は $\mathfrak{N}$ 上の有界線形写像であり，$\|\alpha_f\|\leqq\|f\|_1$．$f_1, f_2\in L^1(G)$ に対して，$\alpha_{f_1*f_2}=\alpha_{f_1}\circ\alpha_{f_2}$ が成立する．

[**定義 7.1**] (1) $A\in\mathfrak{N}$ に対して, $\mathrm{Sp}_\alpha(A)\equiv\cap\{Z(f)\ ;\ f\in L^1(G), \alpha_f(A)=0\}$. ただし, $Z(f)=\{\gamma\in\hat{G}\ ;\ \hat{f}(\gamma)=0\}$.

(2) $\Lambda\subset\hat{G}$ に対して, $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)$ を $\{A\in\mathfrak{N}\ ;\ \mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\Lambda\}$ の τ^{uw}-閉包とし, α に関する Λ の**スペクトル部分空間**という.

(3) $\mathrm{Sp}(\alpha)\equiv\cap\{Z(f)\ ;\ f\in L^1(G), \alpha_f=0\}$ を α の **Arveson スペクトル**という.

〈**補題 7.1**〉 (1) $\mathrm{Sp}_\alpha(\lambda A)=\mathrm{Sp}_\alpha(A)$ ($\forall\lambda\in\boldsymbol{C}, \lambda\neq0$).

(2) $\mathrm{Sp}_\alpha(A+B)\subset\mathrm{Sp}_\alpha(A)\cup\mathrm{Sp}_\alpha(B)$.

(3) $\mathrm{Sp}_\alpha(A^*)=-\mathrm{Sp}_\alpha(A)$.

(4) $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_\mu(A))\subset\mathrm{Sp}_\alpha(A)\cap\mathrm{supp}\,\hat{\mu}$ ($\forall\mu\in M(G)$; なお, $\mathrm{supp}\,\hat{\mu}$ は $\hat{\mu}$ の台).

(5) $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_g(A))=\mathrm{Sp}_\alpha(A)$ ($\forall g\in G$).

(6) $\mathrm{Sp}_\alpha(A)=\emptyset\Longleftrightarrow A=0$.

(7) $\mathrm{Sp}_\alpha(A)=\{\gamma\}\Longleftrightarrow A\neq0$ かつ $\alpha_g(A)=\overline{\langle g,\gamma\rangle}A$ ($\forall g\in G$).

(8) $\mu_1,\mu_2\in M(G), \mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\mathrm{int}\{\gamma\in\hat{G}\ ;\ \hat{\mu}_1(\gamma)=\hat{\mu}_2(\gamma)\}$ ならば, $\alpha_{\mu_1}(A)=\alpha_{\mu_2}(A)$. ただし, $\Lambda\subset\hat{G}$ の開核を $\mathrm{int}\,\Lambda$ で表す.

証明 (1), (2) は明らか.

(3) は $\alpha_{\tilde{f}}(A^*)=\alpha_f(A)^*$ と $\hat{\tilde{f}}(\gamma)=\overline{\hat{f}(-\gamma)}$ よりわかる.

(4) : $\gamma\notin\mathrm{Sp}_\alpha(A)$ ならば, $f\in L^1(G)$ が存在して $\alpha_f(A)=0$ かつ $\hat{f}(\gamma)\neq0$. $\alpha_f(\alpha_\mu(A))=\alpha_\mu(\alpha_f(A))=0$ より $\gamma\notin\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_\mu(A))$. $\gamma\notin\mathrm{supp}\,\hat{\mu}$ ならば, $f\in L^1(G)$ が存在して $\mathrm{supp}\,\hat{f}\cap\mathrm{supp}\,\hat{\mu}=\emptyset$ かつ $\hat{f}(\gamma)\neq0$. $(\mu*f)^\wedge=\hat{\mu}\hat{f}=0$ より $\mu*f=0$ であり, $\alpha_f(\alpha_\mu(A))=\alpha_{\mu*f}(A)=0$. よって $\gamma\notin\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_\mu(A))$.

(5) は $\alpha_f(\alpha_g(A))=\alpha_g(\alpha_f(A))$ より明らか.

(6) : $\mathcal{J}=\{f\in L^1(G)\ ;\ \alpha_f(A)=0\}$ とおくと, $\mathcal{J}$ は $L^1(G)$ の閉イデアルである. よって Tauber 型定理より, $\mathrm{Sp}_\alpha(A)=Z(\mathcal{J})=\emptyset$ は, $\mathcal{J}=L^1(G)$ つまり $A=0$ と同値である.

(7) : $\mathcal{J}$ を上と同じくとると, Tauber 型定理より, $Z(\mathcal{J})=\{\gamma\}$ は $\mathcal{J}=\{f\in L^1(G)\ ;\ \hat{f}(\gamma)=0\}$ と同値である. $\mathcal{J}=\{f\in L^1(G)\ ;\ \hat{f}(\gamma)=0\}$ のとき, 任意の $f\in L^1(G)$, $g\in G$ に対して, $f_g(h)=f(h-g)-\overline{\langle g,\gamma\rangle}f(h)$ とおくと, $\hat{f}_g(\gamma)=0$ より $f_g\in\mathcal{J}$. よって $\alpha_{f_g}(A)=\alpha_f(\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma\rangle}A)=0$ ($\forall f\in L^1(G), \forall g\in G$). したがって, $\alpha_g(A)=\overline{\langle g,\gamma\rangle}A$ ($\forall g\in G$). また, (6) より $A\neq0$. 逆に, $A\neq0$ で $\alpha_g(A)=\overline{\langle g,\gamma\rangle}A$ ($\forall g\in G$) のとき, 任意の $f\in L^1(G)$ に対して $\alpha_f(A)=\hat{f}(\gamma)A$ だから, $\mathcal{J}=\{f\in L^1(G)\ ;\ \hat{f}(\gamma)=0\}$.

(8) : 仮定より $\mathrm{Sp}_\alpha(A)\cap\mathrm{supp}(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)=\emptyset$. (4) と (6) より, $\alpha_{\mu_1-\mu_2}(A)=0$. よっ

て $\alpha_{\mu_1}(A)=\alpha_{\mu_2}(A)$. ▌

〈補題 7.2〉 任意の $A\in\mathfrak{N}$ は, $\{\alpha_f(A)\ ;\ f\in L^1(G), \|f\|_1\leqq 1,\ \mathrm{supp}\,\hat{f}$ はコンパクト$\}$ の τ^{uw}-閉包に属する.

証明 A が $\{\alpha_f(A)\ ;\ f\in L^1(G), \|f\|_1\leqq 1\}$ の τ^{uw}-閉包に属することは容易にわかる. $L^1(G)$ の近似単位元 $\{u_\iota\}$ で $\|u_\iota\|_1\leqq 1$ かつ $\mathrm{supp}\,\hat{u}_\iota$ がコンパクトなものが存在する. このとき, 任意の $f\in L^1(G)$ に対して, $\|f*u_\iota\|_1\leqq\|f\|_1$ であり, $\|\alpha_{f*u_\iota}(A)-\alpha_f(A)\|\leqq\|f*u_\iota-f\|_1\|A\|\to 0$. よって補題は成立する. ▌

〈定理 7.3〉 (1) 任意の $\Lambda\subset\hat{G}$ に対して, $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)$ は α-不変な $\mathfrak{N}$ の部分空間である.

(2) $\Lambda\subset\hat{G}$ が閉集合のとき, $\mathcal{J}_0(\Lambda)=\{f\in L^1(G)\ ;\ \Lambda\subset\mathrm{int}\,Z(f)\}$ とおくと, $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)=\{A\in\mathfrak{N}\ ;\ \mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\Lambda\}=\{A\in\mathfrak{N}\ ;\ \alpha_f(A)=0,\ \forall f\in\mathcal{J}_0(\Lambda)\}$.

(3) 任意の $\Lambda\subset\hat{G}$ に対して, $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)^*=\mathfrak{N}(\alpha,-\Lambda)$.

(4) $\Lambda_1,\Lambda_2\subset\hat{G}$ が閉集合のとき, $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_1)\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_2)\subset\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_1+\Lambda_2)$.

証明 (1) は〈補題 7.1〉の(1), (2), (5), (6) より明らか.

(2): $\mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\Lambda$ のとき, $f\in\mathcal{J}_0(\Lambda)$ ならば,〈補題 7.1〉の (4) より $\mathrm{Sp}_\alpha(\alpha_f(A))\subset\mathrm{Sp}_\alpha(A)\cap\mathrm{supp}\,\hat{f}=\emptyset$. よって,〈補題 7.1〉の (6) より $\alpha_f(A)=0$. 逆に, $\alpha_f(A)=0$ $(\forall f\in\mathcal{J}_0(\Lambda))$ ならば $\mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\cap\{Z(f)\ ;\ f\in\mathcal{J}_0(\Lambda)\}=\Lambda$. したがって,

$$\{A\in\mathfrak{N}\ ;\ \mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\Lambda\}=\{A\in\mathfrak{N}\ ;\ \alpha_f(A)=0,\ \ \forall f\in\mathcal{J}_0(\Lambda)\}.$$

ところで, 任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して, $\varphi\circ\alpha_f=\int_G f(g)\varphi\circ\alpha_g dg\in\mathfrak{N}_*$ だから, $A\in\mathfrak{N}\mapsto\alpha_f(A)\in\mathfrak{N}$ は τ^{uw} 位相に関して連続である. よって, 上の等式の右辺は τ^{uw}-閉となり, (2) が示せた.

(3) は〈補題 7.1〉の (3) より明らか.

(4): $A_1\in\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_1)$, $A_2\in\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_2)$ のとき, $A_1A_2\in\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda_1+\Lambda_2)$ を示す.〈補題 7.2〉と〈補題 7.1〉の (4) より, Λ_1,Λ_2 はコンパクトとしてよい. (2) より, $0\in\hat{G}$ の任意のコンパクト近傍 $\mathcal{W}$ と $\Lambda_1+\Lambda_2+\mathcal{W}+\mathcal{W}\subset Z(f)$ である任意の $f\in L^1(G)$ に対して $\alpha_f(A_1A_2)=0$ を証明すればよい. $\mathrm{supp}\,\hat{f}_j\subset\Lambda_j+\mathcal{W}$ かつ Λ_j の近傍で $\hat{f}_j(\gamma)=1=\hat{\delta}_0(\gamma)$ (ただし, δ_0 は $0\in G$ における Dirac 測度) となる $f_j\in L^1(G)$ $(j=1,2)$ が存在する.〈補題 7.1〉の (8) より, $\alpha_{f_j}(A_j)=\alpha_{\delta_0}(A_j)=A_j$ $(j=1,2)$. よって, 任意の $\varphi\in\mathfrak{N}_*$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_f(A_1A_2))&=\int_G f(g)\varphi(\alpha_g(A_1A_2))dg\\&=\iiint f(g)f_1(g_1)f_2(g_2)\varphi(\alpha_g(\alpha_{g_1}(A_1)\alpha_{g_2}(A_2)))dg_2dg_1dg\end{aligned}$$

$$=\iiint f(g)f_1(g_1)f_2(g_2)\varphi(\alpha_{g+g_1}(A_1\alpha_{g_2-g_1}(A_2)))dg_2dg_1dg.$$

いま，$\xi: G\times G\to C$ を $\xi(t,h)=\varphi(\alpha_t(A_1\alpha_h(A_2)))$ で定めると，ξ は有界連続である．$g_2-g_1=h$，$g+g_1=t$ と変換して Fubini の定理を用いると，

$$\varphi(\alpha_f(A_1A_2))=\iiint f(g)f_1(t-g)f_2(t-g+h)\xi(t,h)dhdtdg$$
$$=\iint \eta(t,h)\xi(t,h)dhdt.$$

ここで，$\eta(t,h)=\int f(g)f_1(t-g)f_2(t-g+h)dg$．$\hat{f}_j$ がコンパクト台をもつ連続函数だから，$f_j\in L^2(G)$ $(j=1,2)$．$f_2{}^h(g)=f_2(g+h)$ とおくと，$f_1f_2{}^h\in L^1(G)$ で $\eta(t,h)=(f*(f_1f_2{}^h))(t)$．$(f_1f_2{}^h)^\wedge(\gamma)=(\hat{f}_1*\widehat{f_2{}^h})(\gamma)$，$\widehat{f_2{}^h}(\gamma)=\langle h,\gamma\rangle\hat{f}_2(\gamma)$ だから，$\gamma\notin\operatorname{supp}\hat{f}_1+\operatorname{supp}\hat{f}_2$ ならば $(f_1f_2{}^h)^\wedge(\gamma)=0$ $(\forall h\in G)$．ところで，$\operatorname{supp}\hat{f}_1+\operatorname{supp}\hat{f}_2\subset\Lambda_1+\Lambda_2+\mathcal{W}+\mathcal{W}\subset Z(f)$ であるから，$\eta(\cdot,h)^\wedge=\hat{f}(f_1f_2{}^h)^\wedge=0$ $(\forall h\in G)$．よって $\eta(\cdot,h)=0$ $(\forall h\in G)$ であり，$\varphi(\alpha_f(A_1A_2))=0$．したがって $\alpha_f(A_1A_2)=0$．▌

〈**定理 7.4**〉（1） $\mathrm{Sp}(\alpha)$ は $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)=\mathfrak{N}$ となる最小の閉集合 $\Lambda\subset\hat{G}$ に等しい．

（2） $\mathrm{Sp}(\alpha)=-\mathrm{Sp}(\alpha)$．

証明 （1）: $\mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\mathrm{Sp}(\alpha)$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$ より，$\mathfrak{N}(\alpha,\mathrm{Sp}(\alpha))=\mathfrak{N}$．$\Lambda\subset\hat{G}$ が閉集合で $\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)=\mathfrak{N}$ とすると，〈定理 7.3〉の（2）より $\alpha_f=0$ $(\forall f\in\mathcal{J}_0(\Lambda))$．よって $\mathrm{Sp}(\alpha)\subset\cap\{Z(f); f\in\mathcal{J}_0(\Lambda)\}=\Lambda$．

（2）は $\alpha_f=0\Longleftrightarrow\alpha_{\tilde{f}}=0$ より容易にわかる．▌

〈**補題 7.5**〉 $\gamma_0\in\hat{G}$，コンパクト集合 $K\subset G$，$\varepsilon>0$ を任意に与えたとき，γ_0 のコンパクト近傍 $\mathcal{W}$ が存在して

$$\|\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}A\|\leqq\varepsilon\|A\|,\quad \forall A\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W}),\ \forall g\in K.$$

証明 γ_0 のコンパクト近傍 $\mathcal{W}_0$ と $\hat{f}(\gamma)=1$ $(\forall\gamma\in\mathcal{W}_0)$ となる $f\in L^1(G)$ をとる．各 $g\in K$ に対して，$f_g\in L^1(G)$ を $f_g(h)=f(h-g)-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}f(h)$ で定める．$\hat{f}_g(\gamma_0)=0$ より，$k_g\in L^1(G)$ と γ_0 の近傍 $\mathcal{W}_g$ が存在して $\hat{k}_g(\gamma)=1$ $(\forall\gamma\in\mathcal{W}_g)$ かつ $\|f_g*k_g\|_1<\varepsilon$ となることが証明できる．$g\in G\longmapsto f_g\in L^1(G)$ がノルム連続だから，g の近傍 $\mathcal{V}_g$ が存在して $\|f_t*k_g\|_1<\varepsilon$ $(\forall t\in\mathcal{V}_g)$．$K$ がコンパクトだから，$g_1,\cdots,g_n\in K$ が存在して $K\subset\bigcup_{i=1}^n\mathcal{V}_i$．ただし，$\mathcal{V}_i=\mathcal{V}_{g_i}$ とおいた．また，$\mathcal{W}_i=\mathcal{W}_{g_i}$，$k_i=k_{g_i}$ とおく．そこで，γ_0 のコンパクト近傍 $\mathcal{W}\subset\mathrm{int}\left(\mathcal{W}_0\cap\left(\bigcap_{i=1}^n\mathcal{W}_i\right)\right)$ をとる．任意の $A\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})$，$g\in K$ に対して，$g\in\mathcal{V}_i$ として $\gamma\in\mathcal{W}_0\cap\mathcal{W}_i$ ならば，$\hat{k}_i(\gamma)=\hat{f}(\gamma)=1$ より

$$(f_g * k_i)^\wedge(\gamma)=\hat{f}_g(\gamma)=\overline{\langle g,\gamma\rangle}-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}=(\delta_g-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}\delta_0)^\wedge(\gamma).$$

よって，〈補題 7.1〉の（8）より $\alpha_{f_g*k_i}(A)=\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}A$ となり，$\|\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma_0\rangle}A\|\leqq\|f_g*k_i\|_1\|A\|\leqq\varepsilon\|A\|$. ∎

〈定理 7.6〉 $\gamma\in\hat{G}$ に対して，次は同値である.

（1） $\gamma\in\mathrm{Sp}(\alpha)$.

（2） γ の任意の近傍 $\mathcal{W}$ に対して，$\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\neq\{0\}$.

（3） ネット $\{A_i\}\subset\mathfrak{N}, \|A_i\|=1$ が存在して，G の各コンパクト集合上で一様に $\|\alpha_g(A_i)-\overline{\langle g,\gamma\rangle}A_i\|\to 0$.

（4） 任意の $f\in L^1(G)$ に対して，$|\hat{f}(\gamma)|\leqq\|\alpha_f\|$.

証明 （1）⇒（2）：γ の任意の近傍 $\mathcal{W}$ に対して，$\hat{f}(\gamma)=1$, $\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset\mathcal{W}$ となる $f\in L^1(G)$ をとると，（1）より $\alpha_f\neq 0$. よって $\alpha_f(A)\neq 0$ となる $A\in\mathfrak{N}$ をとれば，$\alpha_f(A)\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})$ より $\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\neq\{0\}$.

（2）⇒（3）：任意のコンパクト集合 $K\subset G$ と $\varepsilon>0$ に対して，〈補題 7.5〉のように γ の近傍 $\mathcal{W}$ をとる. $\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\neq\{0\}$ より $A_{K,\varepsilon}\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})$, $\|A_{K,\varepsilon}\|=1$ が存在して，$\|\alpha_g(A_{K,\varepsilon})-\overline{\langle g,\gamma\rangle}A_{K,\varepsilon}\|\leqq\varepsilon$ $(\forall g\in K)$. よって $\{A_{K,\varepsilon}\}$ が求めるネットである.

（3）⇒（4）：任意の $f\in L^1(G)$ とコンパクト集合 $K\subset G$ に対して，

$$\|\alpha_f(A_i)-\hat{f}(\gamma)A_i\|\leqq\int_G|f(g)|\|\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma\rangle}A\|dg$$

$$\leqq\|f\|_1(\sup_{g\in K}\|\alpha_g(A)-\overline{\langle g,\gamma\rangle}A\|)+2\int_{G\setminus K}|f(g)|dg.$$

よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある A_i で $\|\alpha_f(A_i)-\hat{f}(\gamma)A_i\|<\varepsilon$ となり，$|\hat{f}(\gamma)|<\|\alpha_f(A_i)\|+\varepsilon\leqq\|\alpha_f\|+\varepsilon$. したがって $|\hat{f}(\gamma)|\leqq\|\alpha_f\|$.

（4）⇒（1）：任意の $f\in L^1(G)$ に対して，$\alpha_f=0$ ならば $\hat{f}(\gamma)=0$. よって $\gamma\in\mathrm{Sp}(\alpha)$. ∎

$\mathfrak{N}^\alpha$ を α の不動点代数とする (i.e., $\mathfrak{N}^\alpha\equiv\{A\in\mathfrak{N}\,;\,\alpha_g(A)=A,\ \forall g\in G\}$). 任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)$ に対して，$\alpha_g^E=\alpha_g\restriction\mathfrak{N}_E$ により G の $\mathfrak{N}_E=E\mathfrak{N}E$ 上の連続作用 α^E が定まる.

〈補題 7.7〉 E, E_1, E_2 を $\mathfrak{N}^\alpha$ の 0 でない射影とするとき，次が成立する.

（1） $\Lambda\subset\hat{G}$ が閉集合のとき，$\mathfrak{N}_E(\alpha^E,\Lambda)=\mathfrak{N}(\alpha,\Lambda)\cap\mathfrak{N}_E$.

（2） $E_1\leqq E_2$ ならば $\mathrm{Sp}(\alpha^{E_1})\subset\mathrm{Sp}(\alpha^{E_2})$.

（3） E の $\mathfrak{N}^\alpha$ における中心台を $\bar{E}$ とすると，$\mathrm{Sp}(\alpha^{\bar{E}})=\mathrm{Sp}(\alpha^E)$.

証明 （1）は $\mathrm{Sp}_{\alpha^E}(A)=\mathrm{Sp}_\alpha(A)$ $(\forall A\in\mathfrak{N}_E)$ より明らか.

（2）：$\mathfrak{N}_{E_1}=(\mathfrak{N}_{E_2})_{E_1}$, $\alpha^{E_1}=(\alpha^{E_2})^{E_1}$ に注意すれば，（1）と〈定理 7.4〉の（1）より

すぐにわかる.

(3):(2)より $\mathrm{Sp}(\alpha^E)\subset\mathrm{Sp}(\alpha^{\bar{E}})$. $\gamma\in\mathrm{Sp}(\alpha^{\bar{E}})$ のとき, (1)と〈定理7.6〉より, γ の任意のコンパクト近傍 $\mathcal{W}$ に対して $0\neq A\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\cap\mathfrak{N}_{\bar{E}}$ が存在する. $\bar{E}=\vee\{UEU^*;U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}^\alpha)\}$ より, $U,V\in\mathcal{U}(\mathfrak{N}^\alpha)$ が存在して $UEU^*AVEV^*\neq 0$. よって $0\neq EU^*AVE\in\mathfrak{N}_E$. $E,U,V\in\mathfrak{N}^\alpha=\mathfrak{N}(\alpha,\{0\})$ だから, 〈定理7.3〉の(4)より, $EU^*AVE\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\cap\mathfrak{N}_E=\mathfrak{N}_E(\alpha^E,\mathcal{W})$. したがって,〈定理7.6〉より $\gamma\in\mathrm{Sp}(\alpha^E)$. ∎

[定義7.2] $\Gamma(\alpha)\equiv\cap\{\mathrm{Sp}(\alpha^E);0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)\}$ を α の **Connesスペクトル**という.

〈定理7.8〉 (1) $\Gamma(\alpha)=\cap\{\mathrm{Sp}(\alpha^E);0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}^\alpha))\}$. ただし, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}^\alpha)$ は $\mathfrak{N}^\alpha$ の中心である.

(2) $\mathfrak{N}^\alpha$ が因子ならば $\Gamma(\alpha)=\mathrm{Sp}(\alpha)$.

(3) $\Gamma(\alpha)+\mathrm{Sp}(\alpha)=\mathrm{Sp}(\alpha)$.

(4) $\Gamma(\alpha)$ は $\hat{G}$ の閉部分群である.

証明 (1)は〈補題7.7〉の(3)より明らか. (2)は(1)より明らか.

(3):任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)$ に対して, $\alpha_g^E(E)=E$ $(\forall g\in G)$ だから, 〈定理7.6〉より $0\in\mathrm{Sp}(\alpha^E)$. よって $0\in\Gamma(\alpha)$. したがって $\Gamma(\alpha)+\mathrm{Sp}(\alpha)\supset\mathrm{Sp}(\alpha)$. 逆に, $\gamma_1\in\mathrm{Sp}(\alpha)$, $\gamma_2\in\Gamma(\alpha)$ として $\gamma_1+\gamma_2\in\mathrm{Sp}(\alpha)$ を示す. 〈定理7.6〉より, $\gamma_1+\gamma_2$ の任意の近傍 $\mathcal{W}$ に対して $\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\neq\{0\}$ を示せばよい. γ_j のコンパクト近傍 $\mathcal{W}_j$ $(j=1,2)$ を $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2\subset\mathcal{W}$ のようにとる. $0\neq A_1\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W}_1)$ をとり $E=\vee\{\mathrm{s_r}(\alpha_g(A_1));g\in G\}$ とおくと, $E\in\mathfrak{N}^\alpha$ がわかる. $\gamma_2\in\Gamma(\alpha)\subset\mathrm{Sp}(\alpha^E)$ より, $0\neq A_2\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W}_2)\cap\mathfrak{N}_E$ が存在する. $\alpha_g(A_1)A_2=0$ $(\forall g\in G)$ と仮定すると, $A_2{}^*\mathrm{s_r}(\alpha_g(A_1))=0$ $(\forall g\in G)$ となり $A_2{}^*E=0$. これは $EA_2=A_2\neq 0$ に反する. よって $g\in G$ が存在して $\alpha_g(A_1)A_2\neq 0$. $A=\alpha_g(A_1)A_2$ とおくと, 〈定理7.3〉より $A\in\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W}_1)\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W}_2)\subset\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})$. したがって $\mathfrak{N}(\alpha,\mathcal{W})\neq\{0\}$. これで $\Gamma(\alpha)+\mathrm{Sp}(\alpha)\subset\mathrm{Sp}(\alpha)$ が示せた.

(4):任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)$ に対して, (3)より $\Gamma(\alpha)+\mathrm{Sp}(\alpha^E)\subset\Gamma(\alpha^E)+\mathrm{Sp}(\alpha^E)=\mathrm{Sp}(\alpha^E)$. よって $\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha)\subset\Gamma(\alpha)$. また,〈定理7.4〉の(2)より $\Gamma(\alpha)=-\Gamma(\alpha)$. したがって $\Gamma(\alpha)$ は $\hat{G}$ の閉部分群である. ∎

[定義7.3] 2つの連続作用 $\alpha,\beta:G\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ が**外部共型** (outer conjugate) であるとは, τ^{s*}-連続な写像 $g\in G\mapsto U_g\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して, 次の条件が成立するときをいう:

(i) $U_{g_1+g_2}=U_{g_1}\alpha_{g_1}(U_{g_2})$, $\forall g_1, g_2\in G$ (コサイクル条件).

(ii) $\beta_g(A)=U_g\alpha_g(A)U_g^*$, $\forall A\in\mathfrak{N}$, $\forall g\in G$.

このとき, $\alpha\sim\beta$ と書く.

上で定義した $\alpha\sim\beta$ が, G の $\mathfrak{N}$ 上の連続作用全体における同値関係であることは容易に示せる.

〈**補題 7.9**〉 0 でない $E_1, E_2\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)$ が $\mathfrak{N}$ において $E_1\sim E_2$ ならば, $\Gamma(\alpha^{E_1})=\Gamma(\alpha^{E_2})$.

証明 半等距離作用素 $W\in\mathfrak{N}$ が存在して, $W^*W=E_1$, $WW^*=E_2$. $\gamma\in\Gamma(\alpha^{E_1})$ とするとき, $\gamma\in\Gamma(\alpha^{E_2})$ を示すには,〈定理 7.6〉と〈補題 7.7〉の (1) より, γ の任意のコンパクト近傍 $\mathcal{W}$ と任意の $F_2(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha\cap\mathfrak{N}_{E_2})$ に対して $\mathfrak{N}(\alpha, \mathcal{W})\cap\mathfrak{N}_{F_2}\neq\{0\}$ をいえばよい. $0\in\hat{G}$ の近傍 $\mathcal{V}$ と γ のコンパクト近傍 $\mathcal{W}'$ を $\mathcal{V}+\mathcal{W}'\subset\mathcal{W}$ のようにとる. さらに, $\hat{G}$ の開被覆 $\{\mathcal{V}_j\,;\,j\in J\}$ を $\mathcal{V}_j-\mathcal{V}_j\subset\mathcal{V}$ $(\forall j\in J)$ のようにとり, ある $j\in J$ で $\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset\mathcal{V}_j$ となる $f\in L^1(G)$ の全体を $\mathcal{L}$ とおく. このとき, $\mathcal{L}$ によって張られる部分空間は $L^1(G)$ でノルム稠密となることがわかる. いま, $\alpha_f(F_2W)=0$ $(\forall f\in\mathcal{L})$ とすると, $\alpha_f(F_2W)=0$ $(\forall f\in L^1(G))$ となり $F_2W=0$. よって $F_2=0$ となり矛盾である. したがって, $f\in\mathcal{L}$ が存在して $A=\alpha_f(F_2W)\neq 0$. 〈補題 7.1〉の (4) より, $\mathrm{Sp}_\alpha(A)+\mathcal{W}'-\mathrm{Sp}_\alpha(A)\subset\mathrm{supp}\,\hat{f}-\mathrm{supp}\,\hat{f}+\mathcal{W}'\subset\mathcal{V}+\mathcal{W}'\subset\mathcal{W}$. $AE_1=\alpha_f(F_2WE_1)=\alpha_f(F_2W)=A$ より, $\mathrm{s_r}(A)\leqq E_1$. そこで, $F_1=\vee\{\mathrm{s_r}(\alpha_g(A))\,;\,g\in G\}$ とおくと, $F_1\in\mathfrak{N}^\alpha\cap\mathfrak{N}_{E_1}$ であり, $\gamma\in\Gamma(\alpha^{E_1})$ より $0\neq B\in\mathfrak{N}(\alpha, \mathcal{W}')\cap\mathfrak{N}_{F_1}$ が存在する. $F_1B=B\neq 0$ より, $\alpha_{g_1}(A)B\neq 0$ となる $g_1\in G$ が存在する. さらに, $F_1B^*\alpha_{g_1}(A^*)=B^*\alpha_{g_1}(A^*)\neq 0$ より, $\alpha_{g_2}(A)B^*\alpha_{g_1}(A^*)\neq 0$ となる $g_2\in G$ が存在する. $F_2A=A$ だから $0\neq\alpha_{g_1}(A)B\alpha_{g_2}(A^*)\in\mathfrak{N}_{F_2}$ であり, 〈定理 7.3〉の (4) より

$$\alpha_{g_1}(A)B\alpha_{g_2}(A^*)\in\mathfrak{N}(\alpha, \mathrm{Sp}_\alpha(A)+\mathcal{W}'-\mathrm{Sp}_\alpha(A))\subset\mathfrak{N}(\alpha, \mathcal{W}).$$

よって $\mathfrak{N}(\alpha, \mathcal{W})\cap\mathfrak{N}_{F_2}\neq\{0\}$. したがって $\Gamma(\alpha^{E_1})\subset\Gamma(\alpha^{E_2})$ が示せた. 逆も同様である. ▌

〈**補題 7.10**〉 $\alpha\sim\beta$ ならば, G の $\mathfrak{N}\otimes M_2$ 上の連続作用 θ が存在して,

$$\theta_g\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_g(A) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \theta_g\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \beta_g(A)\end{pmatrix},\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

証明 $\alpha\sim\beta$ を与える連続写像 $g\in G\longmapsto U_g\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ を用いて,

$$\theta_g\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_g(A_{11}) & \alpha_g(A_{12})U_g^*\\ U_g\alpha_g(A_{21}) & U_g\alpha_g(A_{22})U_g^*\end{pmatrix},\quad g\in G,\quad \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\in\mathfrak{N}\otimes M_2$$

と定める．簡単な計算から，$\theta_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{N}\otimes M_2)$ がわかる．また，

$$\theta_{g_1}\circ\theta_{g_2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(A_{11})) & \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(A_{12})U_{g_2}{}^*)U_{g_1}{}^*\\ U_{g_1}\alpha_{g_1}(U_{g_2}\alpha_{g_2}(A_{21})) & U_{g_1}\alpha_{g_1}(U_{g_2}\alpha_{g_2}(A_{22})U_{g_2}{}^*)U_{g_1}{}^*\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_{g_1+g_2}(A_{11}) & \alpha_{g_1+g_2}(A_{12})U_{g_1+g_2}{}^*\\ U_{g_1+g_2}\alpha_{g_1+g_2}(A_{21}) & U_{g_1+g_2}\alpha_{g_1+g_2}(A_{22})U_{g_1+g_2}{}^*\end{pmatrix}$$
$$=\theta_{g_1+g_2}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\quad \forall g_1, g_2\in G.$$

さらに，$g\in G\longmapsto\theta_g\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ は τ^s-連続である．よって θ は G の $\mathfrak{N}\otimes M_2$ 上の連続作用である．▌

〈定理 7.11〉 $\alpha\sim\beta$ ならば $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\beta)$．

証明 〈補題 7.10〉で $E_{11}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ とすると，$E_{11}, E_{22}\in(\mathfrak{N}\otimes M_2)^\theta$ であり，$\mathfrak{N}\otimes M_2$ において $E_{11}\sim E_{22}$．ところで，$\theta^{E_{11}}, \theta^{E_{22}}$ はそれぞれ α, β と同型であるから，〈補題 7.9〉を用いて $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\theta^{E_{11}})=\Gamma(\theta^{E_{22}})=\Gamma(\beta)$．▌

〈定理 7.12〉 $\mathfrak{N}$ が因子で $\Gamma(\alpha)$ が離散的なとき，$\mathrm{Sp}(\alpha)=\Gamma(\alpha)$ が成立することは，$\mathfrak{N}^\alpha$ が因子であることと同値である．

証明 $\mathrm{Sp}(\alpha)=\Gamma(\alpha)$ とする．0でない任意の $E_1, E_2\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}^\alpha)$ をとり，それらの $\mathfrak{N}^\alpha$ における中心台を $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ とする．$\mathfrak{N}$ が因子だから，〈補題 4.44〉より $E_1AE_2\neq 0$ となる $A\in\mathfrak{N}$ が存在する．〈補題 7.1〉の（6）より，$\gamma_0\in\mathrm{Sp}_\alpha(E_1AE_2)$ がとれる．$\mathrm{Sp}(\alpha)$ が離散的だから，$f\in L^1(G)$ が存在して $\hat{f}(\gamma_0)\neq 0$ かつ $\hat{f}(\gamma)=0$ $(\forall\gamma\in\mathrm{Sp}(\alpha)\backslash\{\gamma_0\})$．$B=\alpha_f(E_1AE_2)=E_1\alpha_f(A)E_2$ とおくと，$B\neq 0$ で，〈補題 7.1〉の（4）と（6）より $\mathrm{Sp}_\alpha(B)=\{\gamma_0\}$．よって〈定理 7.3〉の（3）と（4）より，$B^*B\in\mathfrak{N}(\alpha, \{0\})=\mathfrak{N}^\alpha$．そこで，$E=\mathrm{s_r}(B)=\mathrm{s}(|B|)$ とおくと，$0\neq E\in\mathfrak{N}^\alpha$．また，$\gamma_0\in\mathrm{Sp}(\alpha)=\Gamma(\alpha)$ だから，$-\gamma_0\in\mathrm{Sp}(\alpha^E)$ となり，〈定理 7.6〉と〈補題 7.7〉の（1）より $0\neq A_1\in\mathfrak{N}(\alpha, \{-\gamma_0\})\cap\mathfrak{N}_E$ が存在する．$EA_1=A_1$ より $BA_1\neq 0$ で，$BA_1\in\mathfrak{N}(\alpha, \{0\})=\mathfrak{N}^\alpha$．さらに，$E\leqq E_2$ より $E_1BA_1E_2=BA_1\neq 0$．したがって，〈補題 4.44〉より $\bar{E}_1\bar{E}_2\neq 0$．これで $\mathfrak{N}^\alpha$ が因子であることが示せた．逆は〈定理 7.8〉の（2）より一般に成立する．▌

〈定理 7.13〉 $\Gamma(\alpha)^\perp\equiv\{g\in G\,;\,\langle g, \gamma\rangle=1, \forall\gamma\in\Gamma(\alpha)\}$ とするとき，$\mathfrak{N}$ が因子で $\hat{G}/\Gamma(\alpha)$ の部分集合 $\mathrm{Sp}(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ がコンパクトならば，$\Gamma(\alpha)^\perp=\{g\in G\,;$ ある $\mathcal{V}\in\mathcal{U}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}^\alpha))$ で $\alpha_g=\mathrm{Ad}(U)\}$．

これは次節で使われる重要な定理であるが，証明はかなり長いので省略す

る.

7.2 III 型 v.N. 代数の分類

この節では，v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ に対して Connes が導入した 3 つの不変量 $T(\mathfrak{N})$, $\Gamma(\mathfrak{N}), S(\mathfrak{N})$ を説明し，これらによるⅢ型因子の分類理論を紹介する．最後に，Takesaki と Connes によるⅢ型 v.N. 代数の接合積を用いた分解理論（構造理論）について概説する．この節では，定理の証明を一部省略した．それらの部分（前節の最後の定理も含めて）の詳細は Connes の原論文［14］や Takesaki［26］を参照されたい．5.2 節で Tomita-Takesaki 理論を σ-有限な v.N. 代数の場合で説明したので，ここでも v.N. 代数 $\mathfrak{N}$ は常に σ-有限としておく．一般の v.N. 代数の場合には，忠実な正規状態の代わりに忠実な半有限正規荷重を用いれば，ほとんどの結果はそのまま成立する．

$\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ が**内部自己同型写像**であるとは，ある $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して $\alpha=\mathrm{Ad}(U)$ のときをいう．$\mathfrak{N}$ の内部自己同型写像の全体を $\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ で表すと，$\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ の部分群である．さらに，任意の $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ と $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ に対して $\alpha\circ\mathrm{Ad}(U)\circ\alpha^{-1}=\mathrm{Ad}(\alpha(U))$ が成立するから，$\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ は $\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ の正規部分群となる．したがって，剰余群 $\mathrm{Out}(\mathfrak{N})\equiv\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})/\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ がつくれるが，これを $\mathfrak{N}$ の**外部自己同型群**と呼ぶ．また，$\varepsilon_{\mathfrak{N}}:\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})\to\mathrm{Out}(\mathfrak{N})$ を自然な準同型写像とする．いま，$\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 φ をとり，そのモジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^{\varphi}$ を用いて $\delta_{\mathfrak{N}}(t)=\varepsilon_{\mathfrak{N}}(\sigma_t{}^{\varphi})$ $(t\in\boldsymbol{R})$ と定める．$\delta_{\mathfrak{N}}:\boldsymbol{R}\to\mathrm{Out}(\mathfrak{N})$ は準同型写像である．

〈定理 7.14〉 （1） $\delta_{\mathfrak{N}}:\boldsymbol{R}\to\mathrm{Out}(\mathfrak{N})$ は忠実な正規状態 φ のとり方によらない．

（2） $\delta_{\mathfrak{N}}(\boldsymbol{R})$ は $\mathrm{Out}(\mathfrak{N})$ の中心に含まれる．

証明 （1）：別の忠実な正規状態 ψ をとると，〈定理 6.13〉より，Connes コサイクル $U_t=(D\psi:D\varphi)_t$ を用いて $\sigma_t{}^{\psi}=\mathrm{Ad}(U_t)\circ\sigma_t{}^{\varphi}$ と書ける．よって $\varepsilon_{\mathfrak{N}}(\sigma_t{}^{\psi})=\varepsilon_{\mathfrak{N}}(\sigma_t{}^{\varphi})$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$.

（2）は（1）と〈定理 5.24〉より明らか．▌

［定義 7.4］ $\delta_{\mathfrak{N}}$ を $\mathfrak{N}$ の**モジュラー準同型写像**といい，$\delta_{\mathfrak{N}}$ の核を $T(\mathfrak{N})$ で表

す．すなわち $T(\mathfrak{N})\equiv\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,\delta_{\mathfrak{N}}(t)=1\}$．

$T(\mathfrak{N})$ は加法群 $\boldsymbol{R}$ の部分群であり，$\mathfrak{N}$ の代数的不変量になる．

〈定理 7.15〉 $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，次は同値である．

（1） $t\in T(\mathfrak{N})$．

（2） 任意の忠実な正規状態 φ に対して，$\sigma_t^{\varphi}\in\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$．

（3） 任意の忠実な正規状態 φ に対して，$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_\varphi))$ が存在して $\sigma_t^{\varphi}=\mathrm{Ad}(U)$．

（4） 忠実な正規状態 ψ が存在して $\sigma_t^{\psi}=1$．

証明 （4）⇒（1）⇒（2）は，定義と〈定理 7.14〉の（1）より明らか．

（2）⇒（3）：$U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して $\sigma_t^{\varphi}=\mathrm{Ad}(U)$．$\varphi$ が σ_t^{φ}-不変だから，

$$\varphi(UA)=\varphi(UAUU^*)=\varphi(\sigma_t^{\varphi}(AU))=\varphi(AU),\quad \forall A\in\mathfrak{N}.$$

よって $U\in\mathfrak{N}_\varphi$．さらに，任意の $A\in\mathfrak{N}_\varphi$ に対して，〈定理 5.25〉より $UAU^*=\sigma_t^{\varphi}(A)=A$．よって $U\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_\varphi)$．

（3）⇒（4）：忠実な正規状態 φ と $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_\varphi))$ が存在して $\sigma_t^{\varphi}=\mathrm{Ad}(U)$．$U=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda}dE_\lambda$ とスペクトル分解して，$T=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\lambda/t}dE_\lambda\in(\mathfrak{N}_\varphi)_+$ とおくと $U=T^{-it}$ を得る．ここで，U を μU $(|\mu|=1)$ で取り換えてよいから，$\varphi(T)=1$ を仮定してよい．このとき，$\psi=\varphi(T\cdot)$ とおくと，ψ は忠実な正規状態であり，〈補題 6.18〉より $\sigma_t^{\psi}(A)=T^{it}\sigma_t^{\varphi}(A)T^{-it}=A$ $(\forall A\in\mathfrak{N})$．よって $\sigma_t^{\psi}=1$．∎

$\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{R}\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{N})$ が連続作用のとき，『$\mathfrak{N}_*$ が可分で $\boldsymbol{\alpha}_t\in\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ ならば，$\boldsymbol{\tau}^s$-連続な1径数ユニタリー群 $\{U_t\}\subset\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して $\boldsymbol{\alpha}_t=\mathrm{Ad}(U_t)$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ を満たす』ことが知られている．この結果と〈定理 6.20〉より，次の定理は明らかであろう．

〈定理 7.16〉 （1） $\mathfrak{N}$ が半有限ならば $T(\mathfrak{N})=\boldsymbol{R}$．

（2） $\mathfrak{N}_*$ が可分（4.5 節末の 4°参照）のとき，$T(\mathfrak{N})=\boldsymbol{R}$ ならば $\mathfrak{N}$ は半有限である．

註 上の定理の（2）で，$\mathfrak{N}_*$ が可分という仮定はとれない．実際，$T(\mathfrak{N})=\boldsymbol{R}$ である σ-有限なⅢ型因子が存在する．

〈定理 7.17〉 （1） $T(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})=T(\mathfrak{N})\cap T(\mathfrak{M})$．

（2） $E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$，$\mathrm{z}(E)=I$ ならば，$T(\mathfrak{N}_E)=T(\mathfrak{N})$.

（3） $T(\mathfrak{N}')=T(\mathfrak{N})$.

［**定義 7.5**］ $\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 φ のモジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^\varphi$ をとり，$\Gamma(\mathfrak{N})\equiv\Gamma(\sigma^\varphi)$ と定める．

〈定理 7.8〉より，$\Gamma(\mathfrak{N})$ は $\boldsymbol{R}(=\hat{\boldsymbol{R}})$ の閉部分群である．別の忠実な正規状態 ψ をとると，Connes コサイクルによって $\sigma^\varphi\sim\sigma^\psi$ だから，〈定理 7.11〉より $\Gamma(\sigma^\varphi)=\Gamma(\sigma^\psi)$．したがって，$\Gamma(\mathfrak{N})$ は φ のとり方によらずに定まる $\mathfrak{N}$ の不変量である．

さて，$\mathfrak{N}$ の任意の正規状態 φ に対して $E=\mathrm{s}(\varphi)$ とすると，$\varphi\restriction\mathfrak{N}_E$ に関するモジュラー作用素 Δ_φ，モジュラー共役作用素 J_φ，および，モジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^\varphi$ が定義される．

［**定義 7.6**］（1） $S(\mathfrak{N})\equiv\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$；$\varphi$ は $\mathfrak{N}$ 上の正規状態$\}$.

（2） $S_0(\mathfrak{N})\equiv\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$；$\varphi$ は $\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態$\}$.

ここで，$\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$ は Δ_φ のスペクトル集合である．よって，$S(\mathfrak{N})$，$S_0(\mathfrak{N})$ は $[0,\infty)$ の閉部分集合である．

註 Connes は，$S(\mathfrak{N})\equiv\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$；$\varphi$ は $\mathfrak{N}$ 上の忠実な半有限正規荷重$\}$ と定義した．ここでは，Tomita-Takesaki 理論を忠実な正規状態が与えられた場合に限って議論したので，$S(\mathfrak{N})$ の定義を上のようにしたが，両方の定義は同等である．

〈**定理 7.18**〉 $\mathfrak{N}$ が III 型でないことと $0\notin S(\mathfrak{N})$ とは同値である．このとき，$S(\mathfrak{N})=\{1\}$.

証明 $0\notin S(\mathfrak{N})$ とすると，$\mathfrak{N}$ 上の正規状態 φ が存在して $0\notin\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$．$\varphi$ による $\mathfrak{N}_E$ $(E=\mathrm{s}(\varphi))$ の GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ をとれば，$\pi_\varphi(\sigma_t{}^\varphi(A))=\Delta_\varphi{}^{it}\pi_\varphi(A)\Delta_\varphi{}^{-it}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R},\ \forall A\in\mathfrak{N}_E)$．〈定理 5.13〉より $J_\varphi\Delta_\varphi J_\varphi=\Delta_\varphi{}^{-1}$ だから，$\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)=\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi{}^{-1})$．よって $0\notin\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$ より，$\lambda\geqq1$ が存在して $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)\subset[\lambda^{-1},\lambda]$．したがって $\log\Delta_\varphi$ は有界である．このとき，τ^s-連続な 1 径数ユニタリー群 $\{U_t\}\subset\mathcal{U}(\mathfrak{N}_E)$ が存在して $\sigma_t{}^\varphi=\mathrm{Ad}(U_t)$ $(\forall t\in$

$\boldsymbol{R}$) を満たすことが証明できる (Sakai [20] の p. 164 参照). よって, 〈定理 6. 20〉 より $\mathfrak{R}_E$ が半有限となるから, $\mathfrak{R}$ は III 型でない. 逆に, $\mathfrak{R}$ が III 型でないとすると, $\mathfrak{R}$ は 0 でない有限射影をもつ. したがって 〈定理 4. 64〉 より, $\mathfrak{R}$ は正規トレース状態 τ をもつ. このとき, $\Delta_\tau=I$ だから $\mathrm{Sp}(\Delta_\tau)=\{1\}$. ところで, $\mathfrak{R}$ 上の任意の正規状態 φ に対して, $\Delta_\varphi x_\varphi=x_\varphi$ であるから $1\in\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$. よって $S(\mathfrak{R})$ は常に 1 を含む. これで $S(\mathfrak{R})=\{1\}$ が示せた. ▮

特に, $\mathfrak{R}$ が因子のときは, この定理より, $\mathfrak{R}$ が半有限であること, $0\notin S(\mathfrak{R})$, $S(\mathfrak{R})=\{1\}$ はすべて同値である. さらに,

〈定理 7.19〉 $\mathfrak{R}$ が因子のとき, $\mathfrak{R}$ が有限であること, $0\notin S_0(\mathfrak{R})$, $S_0(\mathfrak{R})=\{1\}$ はすべて同値である.

証明 $\mathfrak{R}$ が有限因子ならば, $\mathfrak{R}$ は忠実な正規トレース状態 τ をもち, $\Delta_\tau=I$ より $\mathrm{Sp}(\Delta_\tau)=\{1\}$. よって $S_0(\mathfrak{R})=\{1\}$. $0\notin S_0(\mathfrak{R})$ ならば, $\mathfrak{R}$ 上の忠実な正規状態 φ が存在して $0\notin\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)$. このとき, 〈定理 7. 18〉 の証明と同じく, Δ_φ は有界となる. GNS 表現 $\{\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,x_\varphi\}$ をとると, ネット $\{A_\iota\}\subset\mathfrak{R}_1$ が $A_\iota\xrightarrow{s}A$ のとき,

$$\begin{aligned}\|(\pi_\varphi(A_\iota^*)-\pi_\varphi(A^*))x_\varphi\|&=\|J_\varphi\Delta_\varphi^{1/2}(\pi_\varphi(A_\iota)-\pi_\varphi(A))x_\varphi\|\\&\leqq\|\Delta_\varphi^{1/2}\|\|(\pi_\varphi(A_\iota)-\pi_\varphi(A))x_\varphi\|\to0.\end{aligned}$$

x_φ が $\pi_\varphi(\mathfrak{R})'$ に関する巡回ベクトルだから, $\pi_\varphi(A_\iota^*)\xrightarrow{s}\pi_\varphi(A^*)$ となり $A_\iota^*\xrightarrow{s}A^*$ を得る. したがって, $A\longmapsto A^*$ が $\mathfrak{R}_1$ 上で τ^s-連続となるから, 〈定理 4. 65〉 より $\mathfrak{R}$ は有限である. ▮

〈補題 7.20〉 忠実な $\varphi\in\mathfrak{R}_{*,+}$ に対して, $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)\backslash\{0\}=\exp\mathrm{Sp}(\sigma^\varphi)$.

証明 φ による GNS 表現をとればよいから, 巡回かつ分離ベクトル $x_0\in\mathcal{H}$ により $\varphi(A)=\langle x_0,Ax_0\rangle$ と書けているとしてよい. 任意の $f\in L^1(\boldsymbol{R})$, $A,B\in\mathfrak{R}$ に対して, Δ_φ のスペクトル分解を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}\langle Ax_0,\sigma_f{}^\varphi(B)x_0\rangle=\varphi(A^*\sigma_f{}^\varphi(B))&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(A^*\sigma_t{}^\varphi(B))dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\langle Ax_0,\Delta_\varphi{}^{it}Bx_0\rangle dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\langle Ax_0,\exp(-it\log\Delta_\varphi{}^{-1})Bx_0\rangle dt\\&=\langle Ax_0,\hat{f}(\log\Delta_\varphi{}^{-1})Bx_0\rangle.\end{aligned}$$

よって, $\sigma_f{}^\varphi=0$ は $\hat{f}(\log\Delta_\varphi{}^{-1})=0$ と同値であり, これは, $\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)=\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi{}^{-1})$ より, $\log(\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)\backslash\{0\})$ 上で $\hat{f}(s)=0$ を意味する. したがって, $\mathrm{Sp}(\sigma^\varphi)$ の定義から, $\mathrm{Sp}(\sigma^\varphi)=\log(\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)\backslash\{0\})$ を得る. ▮

〈定理 7.21〉 φ を $\mathfrak{N}$ 上の任意の忠実な正規状態とするとき，次が成立する．

（1） $S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}=\exp\Gamma(\mathfrak{N})$．

（2） $\varphi_E=\varphi\restriction\mathfrak{N}_E$ （$E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$）とすると，

$$S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}=\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\varphi_E})\backslash\{0\}\ ;\ 0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}_\varphi)\}$$
$$=\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\varphi_E})\backslash\{0\}\ ;\ 0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_\varphi))\}.$$

（3） $S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}$ は乗法群 $\boldsymbol{R}^+=(0,\infty)$ の閉部分群であり，

$$(S(\mathfrak{N})\backslash\{0\})\cdot\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi)=\mathrm{Sp}(\Delta_\varphi).$$

（4） $\mathfrak{N}$ が因子のとき，$\mathfrak{N}$ が無限かつ半有限の場合を除き，$S(\mathfrak{N})=S_0(\mathfrak{N})$．

証明 （1）：ψ を $\mathfrak{N}$ 上の任意の正規状態とし，$E=\mathrm{s}(\psi)$ とする．$\mathrm{s}(\psi_1)=E^\perp$ となる $\psi_1\in\mathfrak{N}_{*,+}$ をとり $\omega=\psi+\psi_1$ とおく．$E\in\mathfrak{N}_\omega$ がすぐにわかり，〈定理 5.25〉より $E\in\mathfrak{N}^{\sigma^\omega}$．$\omega\restriction\mathfrak{N}_E=\psi\restriction\mathfrak{N}_E$ に関するモジュラー自己同型群の一意性（〈定理 5.23〉）より，$\sigma_t{}^\omega\restriction\mathfrak{N}_E=\sigma_t{}^\psi$ （$\forall t\in\boldsymbol{R}$）がわかる．よって $\Gamma(\mathfrak{N})=\Gamma(\sigma^\omega)\subset\mathrm{Sp}(\sigma^\omega\restriction\mathfrak{N}_E)=\mathrm{Sp}(\sigma^\psi)$ となり，〈補題 7.20〉より $\exp\Gamma(\mathfrak{N})\subset\exp\mathrm{Sp}(\sigma^\psi)=\mathrm{Sp}(\Delta_\psi)\backslash\{0\}$．したがって $\exp\Gamma(\mathfrak{N})\subset S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}$．逆に，任意の射影 $E(\neq 0)\in\mathfrak{N}_\varphi=\mathfrak{N}^{\sigma^\varphi}$ に対して，$\sigma^\varphi\restriction\mathfrak{N}_E$ が $\varphi_E=\varphi\restriction\mathfrak{N}_E$ のモジュラー自己同型群であるから，〈補題 7.20〉より $S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}\subset\mathrm{Sp}(\Delta_{\varphi_E})\backslash\{0\}=\exp\mathrm{Sp}(\sigma^\varphi\restriction\mathfrak{N}_E)$．したがって $S(\mathfrak{N})\backslash\{0\}\subset\exp\Gamma(\sigma^\varphi)=\exp\Gamma(\mathfrak{N})$．

（2）：任意の射影 E $(\neq 0)\in\mathfrak{N}_\varphi=\mathfrak{N}^{\sigma^\varphi}$ に対して $\sigma^\varphi\restriction\mathfrak{N}_E=\sigma^{\varphi_E}$ であるから，〈定理 7.8〉の（1）より

$$\Gamma(\mathfrak{N})=\cap\{\mathrm{Sp}(\sigma^{\varphi_E})\ ;\ 0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}_\varphi)\}$$
$$=\cap\{\mathrm{Sp}(\sigma^{\varphi_E})\ ;\ 0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}_\varphi))\}.$$

よって，（1）と〈補題 7.20〉より，（2）が成立する．

（3）は〈定理 7.8〉の（3），（4）と〈補題 7.20〉より明らか．

（4）：$\mathfrak{N}$ が有限因子の場合，〈定理 7.19〉より $S(\mathfrak{N})=S_0(\mathfrak{N})=\{1\}$．次に，$\mathfrak{N}$ がIII型因子の場合，〈定理 7.18〉より $0\in S(\mathfrak{N})$．よって（2）より，$S(\mathfrak{N})=\cap\{\mathrm{Sp}(\Delta_{\varphi_E})\ ;\ 0\neq E\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}_\varphi)\}$．ここで，任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して $E\sim I$ であることを示そう．$\mathfrak{N}$ が因子だから $\mathrm{z}(E)=I$ である．$\{F_j\ ;\ j\in J\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ を $F_j\prec E$ （$\forall j\in J$）となる極大直交族とすると，〈補題 4.44〉より $\sum_{j\in J}F_j=I$ がわかる．$\mathfrak{N}$ の σ-有限性より，$\{F_j\ ;\ j\in J\}$ は直交列 $\{F_n\ ;\ n\in\boldsymbol{N}\}$ となる．E が固有無限だから，〈定理 4.53〉より，直交列 $\{E_n\ ;\ n\in\boldsymbol{N}\}\subset\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ が存在して $E_n\sim E$, $\sum_n E_n=E$．$F_n\prec E_n$ （$\forall n\in\boldsymbol{N}$）だから，〈補題 4.40〉より $I\prec E$ となり，$E\sim I$．したがって，任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N}_\varphi)$ に対して，$\mathfrak{N}_E$ は $\mathfrak{N}$ に * 同型であるから，$\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 ψ が存在して $\mathrm{Sp}(\Delta_{\varphi_E})=\mathrm{Sp}(\Delta_\psi)$．よって $S(\mathfrak{N})\subset S_0(\mathfrak{N})$．逆は明らかだから，$S(\mathfrak{N})=S_0(\mathfrak{N})$．∎

$S(\mathfrak{N})$ と $T(\mathfrak{N})$ の関係を次に与える．

〈定理 7.22〉 $(S(\mathfrak{N})\setminus\{0\})^{\perp}\equiv\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,\lambda^{it}=1,\forall\lambda\in S(\mathfrak{N})\setminus\{0\}\}$ とすると，$\mathfrak{N}$ が因子で $S(\mathfrak{N})\neq\{0,1\}$ ならば，$T(\mathfrak{N})=(S(\mathfrak{N})\setminus\{0\})^{\perp}$.

証明 $S(\mathfrak{N})=\{1\}$ の場合，〈定理 7.18〉と〈定理 7.16〉より $T(\mathfrak{N})=\boldsymbol{R}$. $S(\mathfrak{N})\neq\{1\}$ の場合，$\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 φ をとると，〈定理 7.21〉の（1）より $\Gamma(\sigma^{\varphi})=\log(S(\mathfrak{N})\setminus\{0\})\neq\{0\}$. よって $\boldsymbol{R}/\Gamma(\sigma^{\varphi})$ はコンパクトである．したがって，〈定理 7.15〉と〈定理 7.13〉より，

$$T(\mathfrak{N})=\{t\in\boldsymbol{R}\,;\,e^{its}=1,\forall s\in\Gamma(\sigma^{\varphi})\}=(S(\mathfrak{N})\setminus\{0\})^{\perp}.\ \blacksquare$$

次の定理は，$\lambda\in S(\mathfrak{N})$ の具体的な特徴づけを与える．

〈定理 7.23〉 $\lambda\geqq 0$ に対して，$\lambda\in S(\mathfrak{N})$ であることは，任意の $x(\neq 0)\in\mathcal{H}$ と $\varepsilon>0$ に対して，$\|Ax\|>1$, $\|Ax-A'x\|<\varepsilon$, $\|A^*x-\lambda A'^*x\|<\varepsilon$ を満たす $A\in\mathfrak{N}$ と $A'\in\mathfrak{N}'$ が存在することと同値である．

〈定理 7.24〉 （1） $\mathfrak{M}$ が半有限因子ならば $S(\mathfrak{N}\otimes\mathfrak{M})=S(\mathfrak{N})$.

（2） $\mathfrak{N}$ が因子のとき，任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{N})$ に対して $S(\mathfrak{N}_E)=S(\mathfrak{N})$.

（3） $S(\mathfrak{N}')=S(\mathfrak{N})$.

さて，$S(\mathfrak{N})\setminus\{0\}$ は乗法群 $\boldsymbol{R}^+$ の閉部分群であるから，$\{1\}$, $\{\lambda^n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$（ただし $0<\lambda<1$），$\boldsymbol{R}^+$ のいずれかとなる．これにより，III 型因子 $\mathfrak{N}$ を **III_0 型**, **III_λ 型**（$0<\lambda<1$），**III_1 型**に分類する．因子 $\mathfrak{N}$ の分類をまとめると，下の表のようになる．なお，付録に III_λ（$0<\lambda<1$）型因子の例が与えてある．

因子 $\mathfrak{N}$	半有限	III_0 型	$\mathrm{III}_\lambda(0<\lambda<1)$ 型	III_1 型
$S(\mathfrak{N})$	$\{1\}$	$\{0,1\}$	$\{0\}\cup\{\lambda^n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$	$[0,\infty)$
$\Gamma(\mathfrak{N})$	$\{0\}$	$\{0\}$	$(\log\lambda)\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{R}$
$T(\mathfrak{N})$	$\boldsymbol{R}$		$(2\pi/\log\lambda)\boldsymbol{Z}$	$\{0\}$

註 III_0 型因子 $\mathfrak{N}$ に対する $T(\mathfrak{N})$ は一意でない．実際，任意の $t\in\boldsymbol{R}$ に対して，$T(\mathfrak{N})=t\boldsymbol{Z}$ である III_0 型因子 $\mathfrak{N}$ が存在する．

最近 Connes-Haagerup-Størmer が III_λ $(0\leqq\lambda\leqq 1)$ 型因子の Tomita-Takesaki 理論を用いない分類法を与えたので，ここで紹介しておこう．$\mathfrak{N}$ 上の正規状態の全体 $\mathfrak{S}_n$ に，『$\varphi'\sim\varphi\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\{U_n\}\subset\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ が存在して $\|\varphi'-\varphi\circ\mathrm{Ad}(U_n)\|\to 0$』で

同値関係を入れる．この同値関係による商空間 $\mathfrak{S}_n/\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ は，距離 $d([\varphi],[\psi])=\inf\{\|\varphi'-\psi'\|\,;\,\varphi'\sim\varphi,\psi'\sim\psi\}$ により距離空間となる．$\mathfrak{S}_n/\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ の直径は，$\mathfrak{N}$ が因子でなければ，2に等しい．$\mathfrak{N}$ が因子のときは，次のように定まる．

〈**定理 7.25**〉

因　子　$\mathfrak{N}$	I_n　型	I_∞，II型	$\mathrm{III}_\lambda(0\leqq\lambda\leqq 1)$ 型
$\mathfrak{S}_n/\mathrm{Int}(\mathfrak{N})$ の直径	$2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$	2	$2\,\dfrac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}$

以下，III型 v.N. 代数の構造理論を概説しよう．説明は大雑把なスケッチに留める．Takesaki は彼の双対定理を用いて，一般のIII型 v.N. 代数の構造定理を得た．$\mathfrak{N}$ の忠実な正規状態 φ に関するモジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^\varphi$ をとり，接合積 $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}\rtimes_{\sigma^\varphi}\boldsymbol{R}$ およびその上の双対作用 $\theta_t=\widehat{\sigma_t{}^\varphi}$ をつくる．いま，$\mathfrak{N}$ の別の忠実正規状態 ψ に対して，Connes コサイクル $U_t=(D\psi:D\varphi)_t$ をとり，$V\in\mathcal{U}(L^2(\boldsymbol{R},\mathcal{H}))$ を $(V\xi)(t)=U_{-t}\xi(t)$ $(\xi\in L^2(\boldsymbol{R},\mathcal{H}))$ で定めると，$V(\mathfrak{N}\rtimes_{\sigma^\varphi}\boldsymbol{R})V^*=\mathfrak{N}\rtimes_{\sigma^\psi}\boldsymbol{R}$ および $\mathrm{Ad}(V)\circ\widehat{\sigma_t{}^\varphi}=\widehat{\sigma_t{}^\psi}\circ\mathrm{Ad}(V)$ が成立する．したがって $\{\mathfrak{M},\theta\}$ は $\mathfrak{N}$ から標準的に定まることがわかる．ところで，φ の**双対荷重**と呼ばれる $\mathfrak{M}$ 上の忠実な半有限正規荷重 $\tilde{\varphi}$ が，左 Hilbert 代数の議論を使って，導入される．この $\tilde{\varphi}$ に関するモジュラー自己同型群 $\sigma_t{}^{\tilde{\varphi}}$ は，$\sigma_t{}^{\tilde{\varphi}}(\pi_\varphi(A))=\lambda(t)\pi_\varphi(A)\lambda(t)^*$ $(\forall A\in\mathfrak{N},\forall t\in\boldsymbol{R})$ および $\sigma_t{}^{\tilde{\varphi}}(\lambda(s))=\lambda(s)$ $(\forall s,t\in\boldsymbol{R})$ を満たす．ここで，π_φ は σ^φ より定まる $\mathfrak{N}$ の $L^2(\boldsymbol{R},\mathcal{H})$ 上の表現である．よって $\sigma_t{}^{\tilde{\varphi}}=\mathrm{Ad}(\lambda(t))$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ であり，〈定理 6.20〉より $\mathfrak{M}$ は半有限である．$\lambda(t)=T^{it}(\forall t\in\boldsymbol{R})$ となる正の自己共役作用素 $T\eta\,\mathfrak{M}_{\tilde{\varphi}}$ をとり，$\tau=\tilde{\varphi}(T^{-1}\cdot)$ とおく．〈補題 6.18〉より $\sigma_t{}^\tau(X)=T^{-it}\sigma_t{}^{\tilde{\varphi}}(X)T^{it}=X$ $(\forall X\in\mathfrak{M},\ \forall t\in\boldsymbol{R})$ となるから，τ は $\mathfrak{M}$ 上の忠実な半有限正規トレースである．また，〈補題 5.27〉の (2) より $\theta_t(\lambda(s))=e^{-ist}\lambda(s)$ だから，$\theta_t(T)=e^{-t}T$ となり，$\tau\circ\theta_t=e^{-t}\tau$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ が成立する．さらに，$\mathfrak{N}$ がIII型とすると，Takesaki の双対定理より，$\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{R}$ は $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(L^2(\boldsymbol{R}))\simeq\mathfrak{N}$ に $*$ 同型である．このとき，$\mathfrak{M}$ が II_∞ 型であることもわかり，次の定理を得る．

〈定理 7.26〉 III 型 v.N. 代数の構造定理：$\mathfrak{N}$ が III 型 v.N. 代数のとき，II_∞ 型 v.N. 代数 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}$ 上の忠実半有限正規トレース τ，および，$\boldsymbol{R}$ の $\mathfrak{M}$ 上の連続作用 θ が存在して，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{R}$ かつ $\tau\circ\theta_t=e^{-t}\tau$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$． さらに，$\{\mathfrak{M},\theta\}$ は外部共型の意味で一意である．

次に，Connes による III_λ $(0<\lambda<1)$ 型および III_0 型因子の構造定理を述べよう．$\mathfrak{N}$ を III_λ $(0<\lambda<1)$ 型因子として，$t=-2\pi/\log\lambda$ とおく．つまり，t は $T(\mathfrak{N})$ に属する最小の正数である．〈定理 7.15〉 より，$\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 ψ が存在して $\sigma_t^\psi=1$． $\mathcal{K}$ を可算 Hilbert 空間として $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の通常のトレース tr をとると，$\psi\otimes\mathrm{tr}$ は $\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の忠実な半有限正規荷重であり，$\sigma_t^{\psi\otimes\mathrm{tr}}=\sigma_t^\psi\otimes\sigma_t^{\mathrm{tr}}=1$ となる．$\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})\simeq\mathfrak{N}$ において $\psi\otimes\mathrm{tr}$ に対応する $\mathfrak{N}$ の忠実な半有限正規荷重を φ とすると，$\varphi(I)=\infty$ かつ $\sigma_t^\varphi=1$． このとき，φ は $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_\varphi$ 上で半有限となるので，$\tau=\varphi\restriction\mathfrak{M}_+$ は $\mathfrak{M}$ 上の忠実な半有限正規トレースである．$\mathrm{Sp}(\sigma^\varphi)=\Gamma(\sigma^\varphi)=(\log\lambda)\boldsymbol{Z}$ だから，〈定理 7.12〉 より $\mathfrak{M}$ は因子である．ところで，$\varphi\circ\mathrm{Ad}(U)=\lambda\varphi$ を満たす $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ の存在が証明できる．このとき，$\sigma_s^\varphi(U)=\lambda^{ts}U$ $(\forall s\in\boldsymbol{R})$ だから，$U\in\mathfrak{N}(\sigma^\varphi,\{-\log\lambda\})$ がいえる．よって〈定理 7.3〉の（3），（4）より，$U\mathfrak{M}U^*=\mathfrak{M}$ がわかる．また，$\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}\cup\{U\}$ で生成されることもわかる．そこで，$\theta=\mathrm{Ad}(U)\restriction\mathfrak{M}$ とおくと，$\theta\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ で $\tau\circ\theta=\lambda\tau$ が成立する．よって II 型因子 $\mathfrak{M}$ は有限でないから，II_∞ 型である．さらに，$\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{Z}$ に＊同型であることが示せて，次の定理を得る．

〈定理 7.27〉 III_λ $(0<\lambda<1)$ 型因子の構造定理：$\mathfrak{N}$ が III_λ $(0<\lambda<1)$ 型因子のとき，II_∞ 型因子 $\mathfrak{M}$ と $\theta\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ が存在して，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{Z}$ かつ $\tau\circ\theta=\lambda\tau$． ここで，$\tau$ は $\mathfrak{M}$ 上の忠実半有限正規トレース（II_∞ 型因子上の忠実半有限正規トレースは定数倍を除き一意）とする．さらに，$\{\mathfrak{M},\theta\}$ は外部共型の意味で一意である．

最後に，$\mathfrak{N}$ を III_0 型因子とする．このとき，0 が $\mathrm{Sp}(\sigma^\psi)$ の孤立点 (i.e.，1 が $\mathrm{Sp}(\Delta_\psi)$ の孤立点) となる $\mathfrak{N}$ 上の忠実な正規状態 ψ が存在する．$\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})\simeq\mathfrak{N}$ において $\psi\otimes\mathrm{tr}$ に対応する $\mathfrak{N}$ の忠実な半有限正規荷重を φ とする．$\sigma_s^{\psi\otimes\mathrm{tr}}=$

$\sigma_s{}^{\psi}\otimes 1$ ($\forall s\in\boldsymbol{R}$) より，0 は $\mathrm{Sp}(\sigma^{\varphi})$ の孤立点である．このとき，φ が $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}_{\varphi}$ 上で半有限となることがわかる．また，$\mathfrak{M}\simeq(\mathfrak{N}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K}))_{\psi\otimes\mathrm{tr}}=\mathfrak{N}_{\psi}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ より，$\mathfrak{M}$ は固有無限である．以上の事実を用いて，次の性質をもつ $U\in\mathcal{U}(\mathfrak{N})$ の存在が証明できる：(1) $U\mathfrak{M}U^*=\mathfrak{M}$；(2) $\mathrm{Sp}_{\sigma^{\varphi}}(U)\subset(0,\infty)$；(3) $\mathfrak{N}$ は $\mathfrak{M}\cup\{U\}$ で生成される．そこで，$\tau=\varphi\restriction\mathfrak{M}_+$, $\theta=\mathrm{Ad}(U)$ とおくと，τ は $\mathfrak{M}$ 上の忠実な半有限正規トレースで，$\theta\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ である．このとき，$0<\lambda<1$ が存在して $\tau\circ\theta\leqq\lambda\tau$ であること，$\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}\rtimes_{\theta}\boldsymbol{Z}$ に＊同型であることが示せる．III_{λ} 型の場合と異なり，$\mathfrak{M}$ は因子でなく，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ は非原子的 (i.e.，極小射影を含まない) である．さらに，θ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ 上でエルゴード的 (i.e.，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})^{\theta}=\boldsymbol{C}I$) である．したがって，次の定理を得る．

〈**定理 7.28**〉 **III_0 型因子の構造定理**：$\mathfrak{N}$ が III_0 型因子のとき，非原子的中心をもつ II_{∞} 型 v.N. 代数 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}$ 上の忠実半有限正規トレース τ，$0<\lambda<1$，および，$\theta\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ が存在して，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_{\theta}\boldsymbol{Z}$，$\tau\circ\theta\leqq\lambda\tau$，かつ θ は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ 上でエルゴード的である．

〈定理 7.26〉で与えた $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_{\theta}\boldsymbol{R}$ を $\mathfrak{N}$ の**連続接合積分解**と呼び，〈定理 7.27〉と〈定理 7.28〉で与えた $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_{\theta}\boldsymbol{Z}$ を $\mathfrak{N}$ の**離散接合積分解**と呼ぶ．これらの構造理論の結果，Ⅲ型 v.N. 代数の研究は，Ⅱ型 v.N. 代数とその上の＊自己同型群の研究に帰せられる．

付録　II 型，III 型 v.N. 代数の例

4.6 節で，v. N. 代数を I 型，II 型，III 型に分類した．I 型 v. N. 代数は，その構造定理（〈定理 4.58〉と〈系 4.59〉）によって完全に決定される．II 型 v. N. 代数は，II_1 型と II_∞ 型に分けられる．さらに 7.2 節で，III 型因子を III_λ 型（$0\leqq\lambda\leqq1$）に分類した．この付録では，II 型，III 型因子のいくつかの例を与える．また，単射的因子の構造論についても簡単に触れる．

まず，群に付随してつくられる v. N. 代数について説明しよう．G を無限離散群とする．G の各点で測度 1 をもつ Haar 測度をとれば，$L^2(G)=l^2(G)$ である．G の $l^2(G)$ 上のユニタリー表現 λ を $(\lambda_g\xi)(h)=\xi(g^{-1}h)$（$\xi\in l^2(G)$, $g, h\in G$）で定める．このとき，$\{\lambda_g\,;\,g\in G\}$ で生成される $l^2(G)$ 上の v. N. 代数を G の**群 v. N. 代数**といい，$\mathfrak{R}(G)$ で表わす．

〈定理 A.1〉 G が無限離散群のとき，$\mathfrak{R}(G)$ が因子であることは，任意の $g(\neq e)\in G$ の共役類 $\{h^{-1}gh\,;\,h\in G\}$ が無限集合であることと同値である．このとき，$\mathfrak{R}(G)$ は II_1 型因子である．

証明 $\delta_g(h)=1(h=g), 0(h\neq g)$ と定めると，$\{\delta_g\,;\,g\in G\}$ は $l^2(G)$ の CONS である．$\tau(A)=\langle\delta_e, A\delta_e\rangle(A\in\mathfrak{R}(G))$ とおくと，$\lambda_g\delta_e=\delta_g(\forall g\in G)$ より，τ が $\mathfrak{R}(G)$ 上の正規トレース状態であることはすぐにわかる．さて，任意の $A\in\mathfrak{R}(G)$ に対して，函数 $A(\cdot)$: $G\to \boldsymbol{C}$ が一意に存在して $A=\sum_{g\in G}A(g)\lambda_g$（$\tau^{us}$–収束）と書ける．実際，$A(g)=\tau(A\lambda_g{}^*)$（$g\in G$）とおくと，

$$
\begin{aligned}
A&=(\sum_g\delta_g\otimes\bar{\delta}_g)A(\sum_h\delta_h\otimes\bar{\delta}_h)=\sum_{g,h}\langle\delta_g, A\delta_h\rangle\delta_g\otimes\bar{\delta}_h\\
&=\sum_{g,h}\tau(\lambda_g{}^*A\lambda_h)\delta_g\otimes\bar{\delta}_h=\sum_{g,h}A(gh^{-1})\delta_g\otimes\bar{\delta}_h\\
&=\sum_g A(g)(\sum_h\delta_{gh}\otimes\bar{\delta}_h)=\sum_g A(g)\lambda_g.
\end{aligned}
$$

$A(\cdot)$ の一意性も明らかである．このとき，$\tau(A^*A)=\sum_{g\in G}|A(g)|^2$ が成立するから，τ は $\mathfrak{R}(G)$ 上で忠実である．よって〈定理 4.64〉より，$\mathfrak{R}(G)$ は有限である．さらに，$(\lambda_hA\lambda_h{}^*)(g)=A(h^{-1}gh)(\forall g, h\in G)$ だから，$A\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{R}(G))$ であることは，$A(h^{-1}gh)=A(g)$（$\forall g, h\in G$），すなわち $A(\cdot)$ が G の任意の共役類上で定数であることと同値である．したがって，$\sum_{g\in G}|A(g)|^2<\infty$ に注意すれば，$\mathfrak{Z}(\mathfrak{R}(G))=\boldsymbol{C}I$ であることは，任意の $g(\neq e)\in G$ の共役類が無限であることと同値である．このとき，$\mathfrak{R}(G)$ は無限次元の有限因子，すなわち II_1 型因子である．▌

〈定理 A.1〉の条件を満たす無限離散群を**無限共役類群**（または **ICC 群**）という．ICC

群の例としては，N の有限個だけを動かす置換の全体のなす群や2個以上の生成元をもつ自由群などがある．

次に，I 有限 型因子の無限テンソル積によってつくられる因子について説明しよう．$k_n \times k_n$ 複素行列の全体からなる C* 代数 M_{k_n} の列 $\{M_{k_n}; n \in \boldsymbol{N}\}$ を考える．各 $n \in \boldsymbol{N}$ に対して．C* テンソル積 $\mathcal{A}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} M_{k_j} (= M_{k_1 k_2 \cdots k_n})$ をとる．さらに，埋め込み $A \in \mathcal{A}_n \longmapsto A \otimes I \in \mathcal{A}_n \otimes M_{k_{n+1}} = \mathcal{A}_{n+1}$ により $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ とみなして，$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ とする．$\mathcal{A}_\infty$ は完備性を除いて C* 代数の性質をもつから，$\mathcal{A}_\infty$ の完備化 $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_\infty}$ は C* 代数となる．各 M_{k_n} 上に状態 φ_n が与えられたとき，$T_n \in (M_{k_n})_+$ により $\varphi_n(A) = \mathrm{tr}(T_n A) (\forall A \in M_{k_n})$ と書けるから，$\mathcal{A}_n$ 上の状態 $\varphi^{(n)}$ を $\varphi^{(n)}(A) = \mathrm{tr}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{n} T_j\right) A\right) (A \in \mathcal{A}_n)$ で定めることができる．このとき，$\varphi^{(n+1)} \restriction \mathcal{A}_n = \varphi^{(n)} (\forall n \in \boldsymbol{N})$ がすぐにわかるので，$\mathcal{A}_\infty$ 上のノルム1の正の線形汎函数 φ が存在して $\varphi \restriction \mathcal{A}_n = \varphi^{(n)} (\forall n \in \boldsymbol{N})$ となる．この φ は $\mathcal{A}$ 上の状態（同じ φ で書く）に一意に拡張される．φ による $\mathcal{A}$ の GNS 表現を $\{\mathcal{H}_\varphi, \pi_\varphi, x_\varphi\}$ とするとき，次が成立する．

〈定理 A.2〉　φ は因子状態である．すなわち，$\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ は因子である．

証明　任意の $Q \in \mathfrak{Z}_\varphi = \pi_\varphi(\mathcal{A})'' \cap \pi_\varphi(\mathcal{A})'$ に対して，Kaplansky の稠密定理と〈定理 4.24〉より，列 $\{A_k\} \subset \mathcal{A}_\infty$ が存在して $\|\pi_\varphi(A_k)\| \leqq \|Q\| \ (\forall k \in \boldsymbol{N})$ かつ $\pi_\varphi(A_k) \xrightarrow{w} Q$. $n \in \boldsymbol{N}$ を任意に固定し，コンパクト群 $\mathcal{U}(\mathcal{A}_n)$ 上の Haar 確率測度 dU を使って，

$$B_k = \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A}_n)} U A_k U^* dU, \qquad k \in \boldsymbol{N}$$

とおくと，$\{B_k\} \subset \mathcal{A}_\infty$ であり，各 B_k は $\mathcal{A}_n$ のすべての元と可換である．

$$\begin{aligned}\pi_\varphi(UA_kU^*) &= \pi_\varphi(U)\pi_\varphi(A_k)\pi_\varphi(U)^* \\ &\xrightarrow{w} \pi_\varphi(U)Q\pi_\varphi(U)^*, \qquad \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{A}_n)\end{aligned}$$

であるから，Lebesgue の有界収束定理より，

$$\begin{aligned}\langle y_1, \pi_\varphi(B_k) y_2 \rangle &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{A}_n)} \langle y_1, \pi_\varphi(UA_kU^*) y_2 \rangle dU \\ &\longrightarrow \langle y_1, Q y_2 \rangle, \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{H}_\varphi.\end{aligned}$$

よって $\pi_\varphi(B_k) \xrightarrow{w} Q$. 任意の $C_1, C_2 \in \mathcal{A}_n$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \pi_\varphi(C_1)x_\varphi, Q\pi_\varphi(C_2)x_\varphi \rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \pi_\varphi(C_1)x_\varphi, \pi_\varphi(B_k)\pi_\varphi(C_2)x_\varphi \rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \varphi(C_1{}^* B_k C_2) = \lim_{k\to\infty} \varphi(C_1{}^* C_2 B_k).\end{aligned}$$

ところで，$B_k \in \mathcal{A}_m (m > n)$ として，

$$B_k \in (\mathcal{A}_n)' \cap \mathcal{A}_m = (\mathcal{A}_n \otimes \boldsymbol{C}I)' \cap \left(\mathcal{A}_n \otimes \left(\bigotimes_{j=n+1}^{m} M_{k_j}\right)\right) = \boldsymbol{C}I \otimes \left(\bigotimes_{j=n+1}^{m} M_{k_j}\right)$$

であるから，$B_k = I \otimes B_k{}'$（ただし $I \in \mathcal{A}_n, B_k{}' \in \bigotimes_{j=n+1}^{m} M_{k_j}$）と書ける．よって

$$\varphi(C_1{}^* C_2 B_k) = \varphi(C_1{}^* C_2 \otimes B_k{}')$$

$$=\mathrm{tr}\left(\left(\bigotimes_{j=1}^{n}T_j\right)C_1{}^*C_2\right)\mathrm{tr}\left(\left(\bigotimes_{j=n+1}^{m}T_j\right)B_k{}'\right)=\varphi(C_1{}^*C_2)\varphi(B_k)$$
$$=\langle x_\varphi,\pi_\varphi(B_k)x_\varphi\rangle\langle\pi_\varphi(C_1)x_\varphi,\pi_\varphi(C_2)x_\varphi\rangle,\qquad \forall k\in\boldsymbol{N}$$

となるから，

$$\langle\pi_\varphi(C_1)x_\varphi,Q\pi_\varphi(C_2)x_\varphi\rangle=\langle x_\varphi,Qx_\varphi\rangle\langle\pi_\varphi(C_1)x_\varphi,\pi_\varphi(C_2)x_\varphi\rangle.$$

これがすべての $C_1,C_2\in\mathcal{A}_\infty$ に対して成立するから，$\{\pi_\varphi(\mathcal{A}_\infty)x_\varphi\}^-=\mathcal{H}_\varphi$ より，$Q\in\boldsymbol{C}I$. したがって $\mathfrak{Z}_\varphi=\boldsymbol{C}I$. ▌

上の定理で与えた因子 $\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ を $\bigotimes_{n=1}^{\infty}\{M_{k_n},\varphi_n\}$ で表す．このような因子は，Araki-Woodsによって研究され分類されたので，**Araki-Woods 因子**（または **ITPFI 因子**）と呼ばれる．Connes は，Araki-Woods 因子の分類を Tomita-Takesaki 理論によって再構成することを動機として，III型因子の分類理論を打ち立てた．

特に，$0\leqq\lambda\leqq1$ に対して，$T_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda/(1+\lambda) & 0\\ 0 & 1/(1+\lambda)\end{pmatrix}\in M_2,\ \varphi_\lambda(A)=\mathrm{tr}(T_\lambda A)\ (A\in M_2)$ とおいて得られる因子 $\mathfrak{R}_\lambda=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\{M_2,\varphi_\lambda\}$ は **Powers 因子**と呼ばれる．Powers 因子 $\mathfrak{R}_\lambda$ の型は，次のように決定される．

〈定理 A.3〉 （1） $\mathfrak{R}_0$ は I_∞ 型因子 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ である．

（2） $0<\lambda<1$ のとき，$\mathfrak{R}_\lambda$ は III_λ 型因子である．

（3） $\mathfrak{R}_1$ は II_1 型因子である．

証明 （1）：〈定理 3.27〉と〈系 3.37〉より，φ が $\mathcal{A}$ 上の純粋状態であることを証明すればよい．いま，ψ を $\mathcal{A}$ 上の状態とし，ある $c>0$ で $\psi\leqq c\varphi$ とする．このとき，各 $\mathcal{A}_n$ 上で $\psi=\varphi$ となることを帰納法により示す．$\mathcal{A}_{n-1}$（ただし $\mathcal{A}_0=\boldsymbol{C}I$）上で $\psi=\varphi$ とする．$\mathcal{A}_n=\mathcal{A}_{n-1}\otimes M_2=M_2(\mathcal{A}_{n-1})$ より，任意の $A\in\mathcal{A}_n$ は $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\ A_{ij}\in\mathcal{A}_{n-1}$ と書ける． $A_{11}\in(\mathcal{A}_{n-1})_+$ のとき， $\varphi(E_{11})=0$ （ここで $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_2$）より，$\varphi\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\varphi(A_{11}\otimes E_{11})=\varphi(A_{11})\varphi(E_{11})=0$. よって $\psi\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$. これより，$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\in\mathcal{A}_n$ に対して，$A_{22}=0$ ならば $\varphi(A)=\psi(A)=0$ となることがわかる．したがって，

$$\psi(A)=\psi\begin{pmatrix}A_{22} & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}=\psi(A_{22})=\varphi(A_{22})=\varphi(A),\qquad \forall A\in\mathcal{A}_n.$$

ゆえに，$\mathcal{A}_\infty$ 上で $\psi=\varphi$ となるから，$\psi=\varphi$. これで φ が純粋状態であることが示せた．

（2）：各 $\mathcal{A}_n$ 上に1径数自己同型群 $\alpha_t{}^{(n)}=\bigotimes_{j=1}^{n}\mathrm{Ad}(T_\lambda{}^{it})$ を定めると，$\alpha_t{}^{(n+1)}\upharpoonright\mathcal{A}_n=\alpha_t{}^{(n)}\ (\forall n\in\boldsymbol{N})$ だから，$\mathcal{A}$ 上の強連続な1径数自己同型群 α_t が存在して $\alpha_t\upharpoonright\mathcal{A}_n=\alpha_t{}^{(n)}$ $(\forall n\in\boldsymbol{N})$．このとき，各 $\varphi\upharpoonright\mathcal{A}_n$ が $(-1,\alpha_t{}^{(n)})$-KMS 状態であるから，φ は $(-1,\alpha_t)$-KMS 状態であることがわかる．φ,α_t の $\mathfrak{R}_\lambda=\pi_\varphi(\mathcal{A})''$ への自然な拡張 $\tilde{\varphi},\tilde{\alpha}_t{}^\varphi$ をそれぞれ ω,σ_t とおくと，〈定理 5.7〉より ω は忠実な $(-1,\sigma_t)$-KMS 状態である．つまり，

σ_t は ω に関するモジュラー自己同型群である．そこで，$(\mathfrak{R}_\lambda)_\omega=(\mathfrak{R}_\lambda)^\sigma$ が因子であることを証明する．いま，$\{1,2,\cdots,n\}$ の置換の全体を Π_n で表す．任意の $p\in\Pi_n$ に対して，$U_p\in\mathcal{U}(\mathcal{A}_n)$ が存在して，$U_p\left(\bigotimes_{j=1}^{n}A_j\right)U_p^*=\bigotimes_{j=1}^{n}A_{p(j)}(\forall A_1,\cdots,A_n\in M_2)$ が成立する．このとき，$U_p\left(\bigotimes_{j=1}^{m}T_\lambda\right)U_p^*=\bigotimes_{j=1}^{m}T_\lambda(\forall m\geqq n)$ より，$\varphi\circ\mathrm{Ad}(U_p)=\varphi$ が成立する．よって $\omega\circ\mathrm{Ad}(\pi_\varphi(U_p))=\omega$ となるから，$\pi_\varphi(U_p)\in(\mathfrak{R}_\lambda)_\omega$．各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して，$p_n\in\Pi_{2n}$ を $p_n(j)=j+n(1\leqq j\leqq n)$，$j-n(n<j\leqq 2n)$ と定め，$U_n=U_{p_n}$ とおく．ここで，$m\in\boldsymbol{N}$ を任意に固定し，$n\geqq m$ とする．$U_n\left(\bigotimes_{j=1}^{m}A_j\right)U_n^*=\left(\bigotimes_{j=1}^{n}I\right)\otimes\left(\bigotimes_{j=1}^{m}A_j\right)(\forall A_1,\cdots,A_m\in M_2$；ただし $I\in M_2)$ であるから，任意の $A\in\mathcal{A}_m$ に対して，$U_nAU_n^*$ は $\mathcal{A}_n$ のすべての元と可換である．よって，任意の $A,B\in\mathcal{A}_m$ に対して

$$\varphi(BU_nAU_n^*)=\varphi(U_nAU_n^*)\varphi(B)=\varphi(A)\varphi(B),\qquad\forall n\geqq m.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\varphi(BU_nAU_n^*)=\varphi(A)\varphi(B)$ $(\forall A,B\in\mathcal{A}_\infty)$．ところで，任意の $Q,R\in\mathfrak{R}_\lambda$ と $\varepsilon>0$ に対して，Kaplansky の稠密定理より，$A,B\in\mathcal{A}_\infty$ が存在して $\|\pi_\varphi(A)\|\leqq\|Q\|$，$\|\pi_\varphi(B)\|\leqq\|R\|$ かつ $\|(\pi_\varphi(A)-Q)x_\varphi\|<\varepsilon$，$\|(\pi_\varphi(B)-Q)^*x_\varphi\|<\varepsilon$．Schwarz 不等式と $\omega\circ\mathrm{Ad}(\pi_\varphi(U_n))=\omega$ を使って，

$$\begin{aligned}
&|\omega(R\pi_\varphi(U_n)Q\pi_\varphi(U_n)^*)-\omega(Q)\omega(R)|\\
&\quad\leqq|\omega((R-\pi_\varphi(B))\pi_\varphi(U_n)Q\pi_\varphi(U_n)^*)|+|\omega(\pi_\varphi(B)\pi_\varphi(U_n)(Q-\pi_\varphi(A))\pi_\varphi(U_n)^*)|\\
&\qquad+|\varphi(BU_nAU_n^*)-\varphi(A)\varphi(B)|+|\omega(\pi_\varphi(A)-Q)\varphi(B)|+|\omega(Q)\omega(\pi_\varphi(B)-R)|\\
&\quad\leqq 2\omega(Q^*Q)^{1/2}\omega((\pi_\varphi(B)-R)(\pi_\varphi(B)-R)^*)^{1/2}\\
&\qquad+2\varphi(BB^*)^{1/2}\omega((\pi_\varphi(A)-Q)^*(\pi_\varphi(A)-Q))^{1/2}+|\varphi(BU_nAU_n^*)-\varphi(A)\varphi(B)|\\
&\quad\leqq 2(\|Q\|+\|R\|)\varepsilon+|\varphi(BU_nAU_n^*)-\varphi(A)\varphi(B)|
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle R^*x_\varphi,\pi_\varphi(U_n)Q\pi_\varphi(U_n)^*x_\varphi\rangle&=\lim_{n\to\infty}\omega(R\pi_\varphi(U_n)Q\pi_\varphi(U_n)^*)\\
&=\omega(Q)\omega(R)=\langle x_\varphi,Qx_\varphi\rangle\langle R^*x_\varphi,x_\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

ここで，$Q\in\mathfrak{R}_\lambda\cap(\mathfrak{R}_\lambda)_\omega'$ とすると，$\pi_\varphi(U_n)\in(\mathfrak{R}_\lambda)_\omega(\forall n\in\boldsymbol{N})$ より

$$\langle R^*x_\varphi,Qx_\varphi\rangle=\langle x_\varphi,Qx_\varphi\rangle\langle R^*x_\varphi,x_\varphi\rangle,\qquad\forall R\in\mathfrak{R}_\lambda.$$

x_φ が $\mathfrak{R}_\lambda$ に関する巡回かつ分離ベクトルであるから，$Q\in\boldsymbol{C}I$．したがって $(\mathfrak{R}_\lambda)_\omega$ は因子である．ゆえに〈定理 7.8〉の（2）より，$\Gamma(\mathfrak{R}_\lambda)=\Gamma(\sigma)=\mathrm{Sp}(\sigma)$．$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in M_2$ に対して，

$$\alpha_t(A)=\begin{pmatrix}\lambda^{it}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{-it}&0\\0&1\end{pmatrix}=\lambda^{-it}A,\qquad\forall t\in\boldsymbol{R}$$

となり，$\sigma_t(\pi_\varphi(A))=\lambda^{-it}\pi_\varphi(A)(\forall t\in\boldsymbol{R})$．よって〈定理 7.6〉より，$\log\lambda\in\mathrm{Sp}(\sigma)$．また，$t=2\pi/\log\lambda$ のとき，$T_\lambda{}^{it}=(1+\lambda)^{-it}I$ より $\alpha_t=1$ となり，$\sigma_t=1$．よって〈定理 7.6〉より，$s\in\mathrm{Sp}(\sigma)$ ならば $\exp(-2\pi is/\log\lambda)=1$，すなわち $s\in(\log\lambda)\boldsymbol{Z}$．ゆえに $\Gamma(\mathfrak{R}_\lambda)=(\log\lambda)\boldsymbol{Z}$ となり，$\mathfrak{R}_\lambda$ は III$_\lambda$ 型因子である．

（3）：$T_1=2^{-1}I$ より，$\varphi\restriction\mathcal{A}_n(\forall n\in\boldsymbol{N})$ はトレース状態である．よって φ は $\mathcal{A}$ 上のト

レース状態となる．〈定理 5.4〉（ゆえに〈系 5.5〉と〈定理 5.7〉）はトレース状態に対しても同様に成立するから，φ の $\mathfrak{R}_1$ への拡張 ω は $\mathfrak{R}_1$ 上の忠実な正規トレース状態となる．したがって，$\mathfrak{R}_1$ は無限次元の有限因子，すなわち II$_1$ 型因子である．▌

さて，II$_1$ 型因子 $\mathfrak{R}_1$ と I$_\infty$ 型因子 $\mathfrak{R}_0=\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ を用いて，$\mathfrak{R}_\infty=\mathfrak{R}_1\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ とおくと，$\mathfrak{R}_\infty$ も Araki–Woods 因子であることはすぐにわかる．また，〈定理 4.70〉より，$\mathfrak{R}_\infty$ は半有限かつ連続的な無限因子，すなわち II$_\infty$ 型因子である．

次に，可換 v. N. 代数のエルゴード的な群作用による接合積によってつくられる因子について説明しよう．$\mathfrak{A}$ が可換 v. N. 代数のとき，$\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ が**自由**であるとは，任意の $E(\neq 0)\in\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ に対して，$0\neq F\leq E$ かつ $F\alpha(F)=0$ となる $F\in\mathcal{P}(\mathfrak{A})$ が存在するときをいう．以下，簡単のため，G を離散群とする．このとき，G の $\mathfrak{A}$ 上の作用 α が**自由**であるとは，任意の $\alpha_g(g\neq e)$ が自由であるときをいう．

〈定理 A.4〉 α を G の v. N. 代数 $\mathfrak{N}$ 上の作用とする．α が $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ 上で自由であるとき，次は同値である．

（1） 接合積 $\mathfrak{N}\rtimes_\alpha G$ は因子である．

（2） α は $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ 上でエルゴード的 (i. e., $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})^\alpha=\boldsymbol{C}I$) である．

離散群 G が測度空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上に可逆な可測変換からなる群 $\{T_g\,;\,g\in G\}$ として作用しているとする．任意の $g\in G$ に対して，$\mu\circ T_g\sim\mu$(i. e., 互いに絶対連続）のとき，可換 v. N. 代数 $L^\infty(\Omega)$ 上の G の作用 α を $\alpha_g(f)=f\circ T_{g^{-1}}(g\in G)$ と定めると，接合積 $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha G$ がつくれる．このような構成法を**群測度空間構成**という．ここで，$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ を Lebesgue 空間（i. e., $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度空間と同型な測度空間）とし，可算群 G が $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上に自由かつエルゴード的に作用しているとき，因子 $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha G$ に関して，次が成立する．

〈定理 A.5〉 （1） $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha G$ が II$_1$ 型 $\Longleftrightarrow$ μ と同値な G-不変有限測度が存在する．

（2） $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha G$ が II$_\infty$ 型 $\Longleftrightarrow$ μ と同値な G-不変 σ-有限測度が存在する．

（3） $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha G$ が III 型 $\Longleftrightarrow$ μ と同値な G-不変 σ-有限測度が存在しない．

〈定理 A.4〉と〈定理 A.5〉の証明およびその適用例は，紙数の都合により省略する．詳しくは，Takesaki [25] の V.7 などを参照されたい．〈定理 A.5〉において，特に $G=\boldsymbol{Z}$ (i. e., 作用 α がひとつのエルゴード変換で与えられる）の場合，因子 $L^\infty(\Omega)\rtimes_\alpha\boldsymbol{Z}$ は **Krieger 因子**と呼ばれる．Krieger は，このような因子の同型性がエルゴード変換の軌道構造によって決定されることを示した．

最後に，単射的因子に関する Connes の仕事を簡単に紹介しておこう．これは，Con-

nesの数多くの仕事のうちでも，最も重要なものである．以下，可分なHilbert空間上のv. N. 代数のみを考える．v. N. 代数 $\mathfrak{N}\subset\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が**単射的** (injective) であるとは，$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{N}$ の上へのノルムが1の射影が存在するときをいう．また，$\mathfrak{N}$ が**近似有限次元**（または**AFD**）であるとは，$\mathfrak{N}$ の有限次元*部分代数の増大列 $\{\mathfrak{M}_n\}$ が存在して $\mathfrak{N}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n\right)''$ となるときをいう．II_1 型AFD因子の一意性は，古くMurray-von Neumannによって示された．AFDでない II_1 型因子の例に，2個以上の生成元をもつ自由群の群v. N. 代数がある．さて，Araki-Woods因子は明らかにAFDであるが，ConnesによるKrieger因子の特徴づけによれば，Krieger因子がAFDであることとAraki-Woods因子がKrieger因子であることがわかる．また，AFD v. N. 代数が単射的であることを示すのは難しくない．

Connesは，1970年代中頃，すべての単射的v. N. 代数がAFDであることを示し，同時に，II_1 型，II_∞ 型，$\mathrm{III}_\lambda(0<\lambda<1)$ 型の単射的因子がそれぞれ $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_\infty, \mathfrak{R}_\lambda$ $(0<\lambda<1)$ のひとつだけであること，さらに，III_0 型単射的因子がKrieger因子であることを証明した．これらの単射的因子の理論において，II_1 型に関する部分が最も難関なところである．II_∞ 型単射的因子 $\mathfrak{N}$ は，II_1 型単射的因子 $\mathfrak{M}$ により $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\otimes\boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ と表せるから，その一意性は II_1 型に帰着される．$\mathrm{III}_\lambda(0<\lambda<1)$ 型単射的因子 $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{Z}$ と離散接合積分解（〈定理7.27〉）したとき，$\mathfrak{M}$ も単射的で $\mathfrak{M}\simeq\mathfrak{R}_\infty$ であり，このとき θ が外部共型の意味で一意であることが証明される．したがって，$\mathrm{III}_\lambda(0<\lambda<1)$ 型単射的因子は一意である．さらに，III_0 型単射的因子 $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{M}\rtimes_\theta\boldsymbol{Z}$ と離散接合積分解（〈定理7.28〉）したとき，$\mathfrak{M}\simeq\mathfrak{R}_\infty\otimes\mathfrak{Z}(\mathfrak{M})$ であり，このこととKrieger因子の特徴づけを使って，$\mathfrak{N}$ がKrieger因子であることが証明される．単射的因子の構造論についての詳細は，Connesの原論文またはTakesaki [26] を参照されたい．

この付録で述べた各種の因子の間の関係をまとめると，

$$\{\text{Araki-Woods 因子}\}\subsetneqq\{\text{Krieger 因子}\}$$
$$\subset\{\text{AFD 因子}\}=\{\text{単射的因子}\}$$

となる．なお，III_0 型Krieger因子には（III_0 型Araki-Woods因子にも），同型でない非可算無限個が存在する．III_1 型Krieger因子の一意性はKriegerによって示されたが，III_1 型単射的因子の一意性は未解決である．ついでに，単射的でない II_1 型，II_∞ 型，$\mathrm{III}_\lambda(0\leq\lambda\leq1)$ 型因子は，それぞれ非可算無限個存在することを付記しておこう．

補註 Haagerupは1984年に，III_1 型単射的因子の一意性（i.e., 可分Hilbert空間上の任意の III_1 型単射的因子は III_1 型Araki-Woods因子に同型）の証明を完成した．

参 考 文 献

ここでは，本書を著述するに当たり参照した単行本のうち，入手が比較的容易であると思われるものを挙げておくことにする．個々の論文は特別なもの（[14]，[27]）を除きすべて割愛した．作用素代数，非可換確率論，およびその応用に関する個別論文は，書物［20]，[25]，[26]，[29］などの文献を参照して頂きたい．

函数解析とその応用に関する一般的参考書をまず挙げておこう．

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I–III, Interscience, (1958, 1963, 1970).

[2] H. Fujita, S. Ito and N. Kuroda, 関数解析Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，岩波書店，(1978).

[3] E. Hille and R. S. Phillips, Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Sci., (1957).

[4] T. Kato, 位相解析，共立出版，(1967).

[5] A. N. Kolmogrov and S. V. Fomin（山崎三郎・柴岡泰光訳），函数解析の基礎 上・下，岩波書店，(1979).

[6] S. T. Kuroda, 関数解析，共立出版，(1980).

[7] S. Maeda, 関数解析，森北出版，(1974).

[8] M. Nakamura, 関数解析入門，槇書店，(1968).

[9] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I : Functional Analysis, Academic Press, (1973).

[10] H. Umegaki and M. Ohya, 確率論的エントロピー，共立出版，(1983).

[11] J. von Neumann, Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, (1932).

[12] K. Yosida, Functional Analysis (5th ed.), Springer, (1978).

作用素代数，非可換確率論に関する書物として以下のものがある．特に，[29]には本書の内容が証明なしで短くまとめられてあり，量子力学系のエントロピー論が展開されている．また，[30]は著者等が開催しているセミナーの定常的な刊行物で，本書の内容と関連が多いので参考に加えた．

[13] O. Bratteli and D. W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I, II, Springer, (1979, 1981).

[14] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, 6 (1973), 133–252.

[15] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations (2nd ed.), Gauthier-

Villars, (1969).

[16] J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (2nd ed.), Gauthier-Villars, (1969).

[17] G. G. Emch, Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Wiley, (1971).

[18] R. V. Kadison and J. B. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I, Academic Press, (1983).

[19] G. K. Pedersen, C*-algebras and their Automorphism Groups, Academic Press, (1979).

[20] S. Sakai, C*-algebras and W*-algebras, Springer, (1971).

[21] R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer, (1970).

[22] Ş. Strătilă, Modular Theory in Operator Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, (1981).

[23] Ş. Strătilă and L. Zsidó, Lectures on von Neumann Algebras, Editura Academiei and Abacus Press, (1979).

[24] M. Takesaki, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Application, Lecture Note in Math. Vol. 128, Springer, (1970).

[25] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer, (1979).

[26] M. Takesaki, 作用素環の構造, 岩波書店, (1983).

[27] M. Tomita, Quasi-standard von Neumann Algebras, Mimeographed Notes, Kyushu Univ., (1967).

[28] D. M. Topping, Lectures on von Neumann Algebras, Van Nostrand, (1971).

[29] H. Umegaki and M. Ohya, 量子論的エントロピー, 共立出版, (1984).

[30] H. Umegaki (Ed.), Seminar on Applied Functional Analysis, First (1978) ~Seventh (1984).

[31] A. van Daele, Continuous Crossed Products and Type III von Neumann Algebras, Cambridge Univ. Press, (1978).

[32] J. von Neumann, Rings of Operators, Pergamon Press, (1961).

記　号　表

索　　引

ア

イ

ウ

エ

オ

カ

キ

ク

ケ

コ

サ

セ

ソ

タ

確率論的エントロピー

——情報理論の函数解析的基礎 1——

量子論的エントロピー

——情報理論の函数解析的基礎 2——

――著 者 紹 介――

梅垣壽春（うめがき ひさはる）

1949年　東北帝国大学理学部数学科卒業
専　攻　応用関数解析，非可換解析，信号解析，エントロピー理論
現　在　東京工業大学名誉教授　理学博士
主　著　「情報理論の進歩」(共編)(岩波書店)，Seminar on Applied Functional Analysis―Information Theory and Related Topics―First(1978年)～Seventh(1984年)(編)，「確率論的エントロピー」(共著)(共立出版)，「量子論的エントロピー」(共著)(共立出版)

大矢雅則（おおや まさのり）

1970年　東京大学理学部物理学科卒業
1976年　Rochester大学大学院修了
専　攻　量子情報理論，数理物理，関数解析，エントロピー理論
現　在　東京理科大学理工学部教授　Ph.D，理学博士
主　著　「確率論的エントロピー」(共著)(共立出版)，「量子論的エントロピー」(共著)(共立出版)，「Quantum Entropy and its Use」(Springer-Verlag)，「量子コンピュータの数理」(丸善)

日合文雄（ひあい ふみお）

1970年　東京工業大学理学部数学科卒業
1975年　同大学大学院理学研究科修士課程修了
専　攻　関数解析，作用素環，作用素論
現　在　東北大学大学院情報科学研究科教授　理学博士

復刊　作用素代数入門
―Hilbert 空間より von Neumann 代数―

検 印 廃 止

1985年1月20日　初版1刷発行
2003年1月25日　復刊1刷発行

著　者　梅垣壽春　大矢雅則　日合文雄
発行者　南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号
印刷者　杉本幹夫
東京都新宿区市谷本村町3丁目29番

NDC 415.5

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　　製本・中條製本　　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会　員

ISBN4-320-01727-7